MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE AUTOVALORES

F. Navarrina, I. Colominas, H. Gómez, J. París, M. Casteleiro

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica] ($\star$)

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\;,\;j = 1\ldots,n.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\ \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{I} \end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{U} &= [\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \ldots \quad \bar{u}_n\,], \\ \underset{\sim}{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}\right. \qquad (\star\star)$$

(*) Si $\underset{\sim}{A}$ es DEF+ $\longrightarrow$ $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

Si $\underset{\sim}{A}$ es SemiDEF+ $\longrightarrow$ $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

(**) Luego: $\underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\Lambda}$.

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+] $(\star)$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\,,\;j = 1\ldots,n.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\ \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{I} \end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{U} &= [\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \ldots \quad \bar{u}_n\,]\,, \\ \underset{\sim}{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}\right. \qquad (\star\star)$$

(*) Si $\underset{\sim}{K}$ es DEF+ $\longrightarrow$ $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$.

Si $\underset{\sim}{K}$ es SemiDEF+ $\longrightarrow$ $0 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$.

(**) Luego: $\underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\Lambda}$.

Equivalencia Prob. Estándar – Prob. Generalizado

Sea el problema

$$\underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underset{\sim}{M} & \text{real, simétrica, DEF+.} \end{cases}$$

Siempre se puede factorizar

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{L}^T. \quad (\star)$$

(*) **Factorización de Cholesky**.

Si se ha realizado la factorización generalizada,

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}'\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}'^T \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{L}^T \ \text{con} \ \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}'\,\underset{\sim}{D}^{1/2}, \quad \underset{\sim}{D}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Problema Estándar y Problema Generalizado (IIIb)

Luego

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T \bar{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{L}^T \bar{u}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underbrace{\underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}}_{\widehat{\underset{\sim}{K}}}\ \underbrace{\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}}_{\widehat{u}} = \lambda\ \underbrace{\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}}_{\widehat{u}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{u} = \lambda \widehat{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \widehat{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}, \\ \widehat{u} = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}. \end{cases} \qquad (\star)$$

(*) Si $\underset{\sim}{K}$ es real, simétrica $\longrightarrow$ $\widehat{\underset{\sim}{K}}$ real, simétrica.
Si $\underset{\sim}{K}$ es real, simétrica y semiDEF+ / DEF+ $\longrightarrow$ $\widehat{\underset{\sim}{K}}$ real, simétrica y semiDEF+ / DEF+.

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{u}_i = \lambda_i\ \widehat{u}_i \\ \widehat{u}_i^T \widehat{u}_j = \delta_{ij} \end{array}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n,$$

y definiendo

$$\bar{u}_i = \underset{\sim}{L}^{-T}\ \widehat{u}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{u}_i = \underset{\sim}{L}^{T}\ \bar{u}_i$$

obtenemos

$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{\underset{\sim}{K}}\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i\right) & = \lambda_i\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i\right) \\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i\right)^T \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_j\right) & = \delta_{ij} \end{array}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

En consecuencia,

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{\widehat{K}}\ \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i = \lambda_i\ \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\ \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n,$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i = \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

Se pretende "reducir" (*) el autovalor λ_k. Para ello se define

$$\boxed{\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A} - \lambda_k\ \left[\bar{u}_k\ \bar{u}_k^T\right]} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{A}'\,\bar{u}_i = \begin{cases} \lambda_i\ \ \bar{u}_i, & \text{si} \quad i \neq k, \\ \boxed{0}\ \ \bar{u}_i, & \text{si} \quad i = k. \end{cases}$$

(*) Convertir el autovalor λ_k en 0, sin modificar los restantes autovalores ni los autovectores.

Pues

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}' \, \bar{u}_i &= \left(\underset{\sim}{A} - \lambda_k \, \left[\bar{u}_k \, \bar{u}_k^T\right]\right) \, \bar{u}_i \\
&= \underset{\sim}{A} \, \bar{u}_i - \lambda_k \, \left[\bar{u}_k \, \bar{u}_k^T\right] \, \bar{u}_i \\
&= \lambda_i \, \bar{u}_i - \lambda_k \, \bar{u}_k \, \left(\bar{u}_k^T \bar{u}_i\right) \\
&= \lambda_i \, \bar{u}_i - \lambda_k \, \bar{u}_k \, \delta_{ki} \\
&= \begin{cases} \lambda_i \, \bar{u}_i, & \text{si} \quad i \neq k \\ 0 \, \bar{u}_i, & \text{si} \quad i = k \end{cases}
\end{aligned}
$$

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i &= \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

Se pretende "reducir" (*) el autovalor λ_k. Para ello se define

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{K}' &= \underset{\sim}{K} - \lambda_k \left[(\underset{\sim}{M}\ \bar{u}_k)\ (\underset{\sim}{M}\ \bar{u}_k)^T \right] \\ \underset{\sim}{M}' &= \underset{\sim}{M} \end{aligned}} \implies \underset{\sim}{K}'\ \bar{u}_i = \begin{cases} \lambda_i\ \ \underset{\sim}{M}'\ \bar{u}_i, & \text{si}\ \ i \neq k, \\ \boxed{0}\ \underset{\sim}{M}'\ \bar{u}_i, & \text{si}\ \ i = k. \end{cases}$$

(*) Convertir el autovalor λ_k en 0, sin modificar los restantes autovalores ni los autovectores.

Pues

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{K}' \, \bar{u}_i &= \left(\underset{\sim}{K} - \lambda_k \left[(\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k) \, (\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k)^T\right]\right) \bar{u}_i \\
&= \underset{\sim}{K} \, \bar{u}_i - \lambda_k \left[(\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k) \, (\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k)^T\right] \bar{u}_i \\
&= \lambda_i \, \underset{\sim}{M} \, \bar{u}_i - \lambda_k \, (\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k) \, \left(\bar{u}_k^T \underset{\sim}{M} \, \bar{u}_i\right) \\
&= \lambda_i \, \underset{\sim}{M} \, \bar{u}_i - \lambda_k \, (\underset{\sim}{M} \, \bar{u}_k) \, \delta_{ki} \\
&= \begin{cases} \lambda_i \, \underset{\sim}{M}' \, \bar{u}_i, & \text{si} \quad i \neq k \\ 0 \, \underset{\sim}{M}' \, \bar{u}_i, & \text{si} \quad i = k \end{cases}
\end{aligned}
$$

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underset{\sim}{M} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T$.

Luego

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u} \iff \widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{u} = \lambda \widehat{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \widehat{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}, \\ \widehat{u} \ = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}. \end{cases}$$

Dado el autovector $\bar{u}_i$ del problema generalizado, su correspondiente del problema estándar equivalente será $\widehat{u}_i = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}_i$ y se verificará $\widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{u}_i = \lambda_i \widehat{u}_i$.

Para “reducir” el autovalor λ_k de este problema, se define

$$\widehat{\underset{\sim}{K}}' = \widehat{\underset{\sim}{K}} - \lambda_k \left[\widehat{u}_k \, \widehat{u}_k^T\right] \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\underset{\sim}{K}}' \, \widehat{u}_i = \begin{cases} \lambda_i \, \widehat{u}_i, & \textsf{si} \quad i \neq k, \\ 0 \, \widehat{u}_i, & \textsf{si} \quad i = k. \end{cases}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\widehat{\underset{\sim}{K}}' \, \widehat{u} = \lambda \, \widehat{u} \quad & \Longleftrightarrow \quad \left[\widehat{\underset{\sim}{K}} - \lambda_k \left[\widehat{u}_k \, \widehat{u}_k^T\right]\right] \widehat{u} = \lambda \, \widehat{u} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left[\underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K} \, \underset{\sim}{L}^{-T} - \lambda_k \left(\underset{\sim}{L}^T \, \bar{u}_k\right) \left(\underset{\sim}{L}^T \, \bar{u}_k\right)^T\right] \left(\underset{\sim}{L}^T \bar{u}\right) = \lambda \left(\underset{\sim}{L}^T \bar{u}\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad \underset{\sim}{L} \left[\underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K} \, \underset{\sim}{L}^{-T} - \lambda_k \left(\underset{\sim}{L}^T \, \bar{u}_k\right) \left(\underset{\sim}{L}^T \, \bar{u}_k\right)^T\right] \left(\underset{\sim}{L}^T \bar{u}\right) = \lambda \, \underset{\sim}{L} \left(\underset{\sim}{L}^T \bar{u}\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left[\underset{\sim}{K} - \lambda_k \left(\underset{\sim}{M}^T \, \bar{u}_k\right) \left(\underset{\sim}{M}^T \, \bar{u}_k\right)^T\right]}_{\underset{\sim}{K}'} \bar{u} = \lambda \, \underset{\sim}{M} \, \bar{u}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\,,\, j = 1\ldots,n.$$

Se pretende “trasladar” (*) los autovalores λ_i una distancia ρ. Para ello se define

$$\boxed{\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A} + \rho\,\underset{\sim}{I}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{A}'\,\bar{u}_i = (\lambda_i + \rho)\,\bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i + \rho)$, sin modificar su correspondiente autovector.

Pues

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A}' \, \bar{u}_i &= (\underset{\sim}{A} + \rho \, \underset{\sim}{I}) \; \bar{u}_i \\ &= \underset{\sim}{A} \, \bar{u}_i + \rho \, \underset{\sim}{I} \, \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \, \bar{u}_i + \rho \, \bar{u}_i \\ &= (\lambda_i + \rho) \; \bar{u}_i. \end{aligned}$$

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

Sea el problema

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{K}\,\bar{u}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array}\right\} \qquad i\,,\,j = 1\ldots,n.$$

Se pretende "trasladar" $(\ast)$ los autovalores λ_i una distancia ρ. Para ello se define

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{K}' = \underset{\sim}{K} + \rho\,\underset{\sim}{M} \\ \underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{M} \end{array}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{K}'\,\bar{u}_i = (\lambda_i + \rho)\,\underset{\sim}{M}'\,\bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i + \rho)$, sin modificar su correspondiente autovector.

Pues

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{K}' \, \bar{u}_i &= (\underset{\sim}{K} + \rho \, \underset{\sim}{M}) \; \bar{u}_i \\ &= \underset{\sim}{K} \; \bar{u}_i + \rho \, \underset{\sim}{M} \; \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \, \underset{\sim}{M} \; \bar{u}_i + \rho \, \underset{\sim}{M} \; \bar{u}_i \\ &= (\lambda_i + \rho) \; \underset{\sim}{M} \; \bar{u}_i . \end{aligned}$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica, no-singular]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i &= \lambda_i\, \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\,,\ j = 1\ldots, n.$$

Se pretende "invertir" (*) los autovalores λ_i. Para ello se define

$$\boxed{\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A}^{-1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{A}'\, \bar{u}_i = (\lambda_i)^{-1}\, \bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i)^{-1}$, sin modificar su correspondiente autovector.

Pues

$$\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i = \lambda_i\,\bar{u}_i, \qquad \det(\underset{\sim}{A}) \neq 0 \implies \lambda_i \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{A}^{-1}\,\bar{u}_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{u}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{A}^{-1}\,\bar{u}_i$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_i)^{-1}\,\bar{u}_i = \underset{\sim}{A}^{-1}\,\bar{u}_i.$$

PROBLEMA GENERALIZADO [$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{K}$ no singular, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\underset{\sim}{M}\,\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\;,\;j = 1\ldots,n.$$

Se pretende "invertir" (*) los autovalores λ_i. Para ello se define

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{K}' &= \underset{\sim}{M} \\ \underset{\sim}{M}' &= \underset{\sim}{K} \end{aligned}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{K}'\,\bar{u}_i = (\lambda_i)^{-1}\,\underset{\sim}{M}'\,\bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i)^{-1}$, sin modificar su correspondiente autovector.

Pues

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i = \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i, \qquad \det(\underset{\sim}{K}) \neq 0 \implies \lambda_i \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_i)^{-1}\ \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i = \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i.$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T\bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

Se define el COCIENTE DE RAYLEIGH $\rho(\bar{v})$ de un vector cualquiera $\bar{v}$ como

$$\boxed{\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T\underset{\sim}{A}\,\bar{v}}{\bar{v}^T\,\bar{v}}.}$$

En lo sucesivo supondremos que los autovalores λ_i se ordenan de forma que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

PROPIEDADES DEL COCIENTE DE RAYLEIGH

1. **RANGO**:

$$\lambda_1 \leq \rho(\bar{v}) \leq \lambda_n \quad \forall \bar{v}.$$

2. **IDENTIFICACIÓN DE AUTOVALORES**:

$$\bar{v} = \alpha\, \bar{u}_i \quad \Longrightarrow \rho(\bar{v}) = \lambda_i.$$

3. **APROXIMACIÓN DE AUTOVALORES**:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = \alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x}, \\ \text{con } \bar{x}^T\bar{x} = 1, \bar{x}^T\bar{u}_i = 0, \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \rho(\bar{v}) = \lambda_i + \mathcal{O}\left((\varepsilon/\alpha)^2\right).$$

4. **CARACTERIZACIÓN MINI-MAX**:

$$\lambda_r = \max_{\{\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_{r-1}\}} \left\{ \min_{\bar{v}} \left(\rho(\bar{v}) \ \middle| \ \bar{v}^T \bar{w}_k = 0 \text{ para } k = 1,\ldots,r-1 \right) \right\}.$$

5. **SEPARACIÓN DE AUTOVECTORES**:

Sean las submatrices principales $\underset{\sim}{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k = 1,\ldots,n.$

Definimos los problemas

$$\underset{\sim}{A}_k \, \bar{u}_i^k = \lambda_i^k \, \bar{u}_i^k \ \text{ con } \left(\bar{u}_i^k\right)^T \bar{u}_j^k = \delta_{ij}, \ \text{ para } i\,,\ j = 1\ldots,k.$$

En estas condiciones, los autovalores λ_i^k verifican

$$\lambda_1^{k+1} \leq \boxed{\lambda_1^k} \leq \lambda_2^{k+1} \leq \boxed{\lambda_2^k} \leq \ldots \leq \boxed{\lambda_{k-1}^k} \leq \lambda_k^{k+1} \leq \boxed{\lambda_k^k} \leq \lambda_{k+1}^{k+1},$$

que es lo que se denomina una secuencia de STURM.

Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

1. **Rango**

Los autovectores forman una base. Por tanto, cualquier vector $\bar{v}$ puede escribirse en la forma $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i$. Luego

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underset{\sim}{A} \, \bar{v}}{\bar{v}^T \, \bar{v}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i\right)^T \underset{\sim}{A} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i\right)^T \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \, \alpha_j \, \left(\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A} \, \bar{u}_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \, \alpha_j \, \left(\bar{u}_i^T \bar{u}_j\right)}$$

Pero $\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A} \, \bar{u}_j = \bar{u}_i^T \, (\lambda_j \, \bar{u}_j) = \lambda_j \delta_{ij}$. Por tanto,

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \, \alpha_j \, \lambda_j \, \delta_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \, \alpha_j \, \delta_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \begin{cases} \geq \dfrac{\alpha_1^2 \, \lambda_1 + \alpha_2^2 \, \lambda_1 + \ldots + \alpha_n^2 \, \lambda_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} = \lambda_1, \\ \leq \dfrac{\alpha_1^2 \, \lambda_n + \alpha_2^2 \, \lambda_n + \ldots + \alpha_n^2 \, \lambda_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} = \lambda_n. \end{cases}$$

Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

2. **Identificación de autovalores**

Si $\bar{v} = \alpha\, \bar{u}_i$ entonces

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{v}}{\bar{v}^T\, \bar{v}} = \frac{(\alpha\, \bar{u}_i)^T\, \underset{\sim}{A}\, (\alpha\, \bar{u}_i)}{(\alpha\, \bar{u}_i)^T\, (\alpha\, \bar{u}_i)} = \frac{\alpha^2\, \left(\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i\right)}{\alpha^2\, \left(\bar{u}_i^T \bar{u}_i\right)} = \frac{\bar{u}_i^T\, \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i}{\bar{u}_i^T\, \bar{u}_i}$$

Pero $\bar{u}_i^T\, \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i = \bar{u}_i^T\, (\lambda_i\, \bar{u}_i) = \lambda_i$. Por tanto

$$\rho(\bar{v}) = \lambda_i.$$

Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

3. Aproximación de autovalores

Si $\bar{v} = \alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x}$ entonces

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{v}}{\bar{v}^T\, \bar{v}} = \frac{(\alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x})^T\, \underset{\sim}{A}\, (\alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x})}{(\alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x})^T\, (\alpha\, \bar{u}_i + \varepsilon\, \bar{x})}$$

$$= \frac{\alpha^2 \left(\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i\right) + \varepsilon^2 \left(\bar{x}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{x}\right) + 2\alpha\varepsilon \left(\bar{x}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i\right)}{\alpha^2 \left(\bar{u}_i^T \bar{u}_i\right) + \varepsilon^2 \left(\bar{x}^T \bar{x}\right) + 2\alpha\varepsilon \left(\bar{x}^T \bar{u}_i\right)}.$$

Pero $\bar{u}_i$ y $\bar{x}$ son vectores unitarios y ortogonales entre sí.
Luego $\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i = \rho(\bar{u}_i)$, $\bar{x}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{x} = \rho(\bar{x})$, y $\bar{x}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{u}_i = \lambda_i \left(\bar{x}^T \bar{u}_i\right) = 0$.
Por tanto

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\alpha^2\, \rho(\bar{u}_i) + \varepsilon^2\, \rho(\bar{x})}{\alpha^2 + \varepsilon^2} = \frac{\lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2\, \rho(\bar{x})}{1 + (\varepsilon/\alpha)^2}$$

$$= \left[\lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2\, \rho(\bar{x})\right] \left[1 - (\varepsilon/\alpha)^2 + (\varepsilon/\alpha)^4 - (\varepsilon/\alpha)^8\, \ldots\right]$$

$$= \lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2 \left[\rho(\bar{x}) - \lambda_i\right] + \mathcal{O}\left((\varepsilon/\alpha)^4\right) = \lambda_i + \mathcal{O}\left((\varepsilon/\alpha)^2\right).$$

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i &= \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots, n.$$

Se define el COCIENTE DE RAYLEIGH $\rho(\bar{v})$ de un vector cualquiera $\bar{v}$ como

$$\boxed{\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underset{\sim}{K}\ \bar{v}}{\bar{v}^T\ \underset{\sim}{M}\ \bar{v}},}$$

con idénticas propiedades a las expuestas en el caso del problema estándar.

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underset{\sim}{K}\, \bar{u} = \lambda\, \underset{\sim}{M}\, \bar{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underset{\sim}{M} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{L}^T$.

Luego

$$\underset{\sim}{K}\, \bar{u} = \lambda\, \underset{\sim}{M}\, \bar{u} \iff \widehat{\underset{\sim}{K}}\, \widehat{u} = \lambda \widehat{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \widehat{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\, \underset{\sim}{L}^{-T}, \\ \widehat{u} \;= \underset{\sim}{L}^T\, \bar{u}. \end{cases}$$

Dado el vector $\bar{v}$ del problema generalizado,
su correspondiente del problema estándar equivalente será $\widehat{v} = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}$,
cuyo cociente de Rayleigh será

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(\widehat{v}) &= \frac{\widehat{v}^T \widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{v}}{\widehat{v}^T\ \widehat{v}} \\
&= \frac{\left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}\right)^T \left[\underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}\right]\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}\right)}{\left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}\right)^T\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}\right)} \\
&= \frac{\bar{v}^T\ \left(\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T} \underset{\sim}{L}^T\right)\ \bar{v}}{\bar{v}^T\ \left(\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T\right)\ \bar{v}} \\
&= \frac{\bar{v}^T\ \underset{\sim}{K}\ \bar{v}}{\bar{v}^T\ \underset{\sim}{M}\ \bar{v}} = \rho(\bar{v})
\end{aligned}$$

PROBLEMA GENERALIZADO [$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{K}$ no singular, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i &= \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots, n.$$

Dados los q vectores linealmente independientes $\{\bar{\psi}_\ell\}_{\ell=1,\ldots,q}$ (en general $q << n$), buscamos aproximaciones a los autovectores $\bar{u}_i$ y a los autovalores λ_i del tipo

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &\approx \bar{u}^R = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell \bar{\psi}_\ell = \underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha}, \\ \lambda_i &\approx \lambda^R = \rho(\bar{u}^R) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \underset{\sim}{\Psi} &= \left[\bar{\psi}_1 \vdots \bar{\psi}_2 \vdots \ldots \vdots \bar{\psi}_q \right], \\ \bar{\alpha} &= \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Para ello, planteamos

$$\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\alpha_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}}\right)^T = \bar{0},$$

lo que equivale a resolver el problema reducido (*)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{K}^R &= \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Psi} \\ \underset{\sim}{M}^R &= \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Psi} \end{aligned}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{K}^R \, \bar{\alpha} = \lambda^R \, \underset{\sim}{M}^R \, \bar{\alpha}.$$

(*) Nótese que las matrices reducidas $\underset{\sim}{K}^R$ y $\underset{\sim}{M}^R$ son de orden $q << n$.

El planteamiento anterior (en términos de la minimización del cociente de Rayleigh) se fundamenta en que...

1. **El cociente de Rayleigh tiene un extremo en cada autovector**:

$$\left.\left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}}\right)^T\right|_{\bar{v}=\bar{u}_i} = \bar{0}.$$

2. **El cálculo de extremos de $\rho(\bar{u}^R)$ equivale al problema reducido**:

$$\left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}}\right)^T = \bar{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{K}^R \bar{\alpha} = \lambda^R \underset{\sim}{M}^R \bar{\alpha}.$$

3. **Si el subespacio $\{\bar{u}^R\}$ contiene un autovector $\bar{u}_i$ el análisis de Rayleigh-Ritz lo detecta**:

$$\bar{u}_i = \underset{\sim}{\Psi}\, \bar{\beta} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{K}^R\, \bar{\beta} = \lambda_i\, \underset{\sim}{M}^R\, \bar{\beta}.$$

Demostraciones:

1. **El cociente de Rayleigh tiene un extremo en cada autovector**:

   Pues

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underset{\sim}{K}\ \bar{v}}{\bar{v}^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} = \frac{2(\bar{v}^T \underset{\sim}{K})(\bar{v}^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}) - 2(\bar{v}^T \underset{\sim}{M})(\bar{v}^T \underset{\sim}{K}\ \bar{v})}{(\bar{v}^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v})^2}$$

$$= \frac{2}{\bar{v}^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}} \left[(\bar{v}^T \underset{\sim}{K}) - \rho(\bar{v})\ (\bar{v}^T \underset{\sim}{M}) \right],$$

   y por tanto

$$\left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T = \frac{2}{\bar{v}^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}} \left[\underset{\sim}{K}\ \bar{v} - \rho(\bar{v})\ \underset{\sim}{M}\ \bar{v} \right].$$

   Luego

$$\left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T \Bigg|_{\bar{v}=\bar{u}_i} = \frac{2}{\bar{u}_i^T \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i} \left[\underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i - \rho(\bar{u}_i)\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \right] = 2 \left[\underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i - \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \right] = \bar{0}.$$

2. **El cálculo de extremos de $\rho(\bar{u}^R)$ equivale al problema reducido**:

Pues

$$\rho(\bar{u}^R) = \rho(\bar{v})\Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} = \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}}\Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} \left[\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left(\underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha}\right)\right] = \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}}\Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} \left[\underset{\sim}{\Psi}\right].$$

y por tanto

$$\left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}}\right)^T = \underset{\sim}{\Psi}^T \left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}}\right)^T\Bigg|_{\bar{v}=\underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha}} = \frac{2}{\bar{\alpha}^T \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha}} \underset{\sim}{\Psi}^T \left[\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha} - \rho(\bar{u}^R)\ \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{\Psi}\ \bar{\alpha}\right]$$

$$= \frac{2}{\bar{\alpha}^T \underset{\sim}{M}^R \bar{\alpha}} \left[\underset{\sim}{K}^R \bar{\alpha} - \lambda^R \underset{\sim}{M}^R \bar{\alpha}\right].$$

Luego

$$\left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}}\right)^T = \bar{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{K}^R \bar{\alpha} = \lambda^R \underset{\sim}{M}^R \bar{\alpha}.$$

3. **Si el subespacio $\{\bar{u}^R\}$ contiene un autovector $\bar{u}_i$ el análisis de Rayleigh-Ritz lo detecta**:

   Pues

$$\bar{u}_i = \underset{\sim}{\Psi}\, \bar{\beta} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{K}^R\, \bar{\beta} = \left[\underset{\sim}{\Psi}^T\, \underset{\sim}{K}\, \underset{\sim}{\Psi}\right]\, \bar{\beta} \quad = \underset{\sim}{\Psi}^T\, \underset{\sim}{K}\, \left[\underset{\sim}{\Psi}\, \bar{\beta}\right] \quad = \underset{\sim}{\Psi}^T\, \underset{\sim}{K}\, \bar{u}_i$$

$$= \underset{\sim}{\Psi}^T\, \left[\underset{\sim}{K}\, \bar{u}_i\right] \quad = \underset{\sim}{\Psi}^T\, \left[\lambda_i\, \underset{\sim}{M}\, \bar{u}_i\right] \quad = \lambda_i\, \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{M}\, \bar{u}_i$$

$$= \lambda_i\, \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{M}\, \left[\underset{\sim}{\Psi}\, \bar{\beta}\right] = \lambda_i\, \left[\underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{\Psi}\right]\, \bar{\beta} = \lambda_i\, \underset{\sim}{M}^R\, \bar{\beta}.$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i &= \lambda_i\,\bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots,n.$$

Dado un vector arbitrario $\bar{v}_0$, el **MÉTODO DE MISES DIRECTO** consiste en:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \bar{v}_{k+1} &= \frac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_k}{|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \rho(\bar{v}_{k+1}) \end{aligned}\right\}} \qquad k = 0, \ldots, \text{(hasta convergencia)}$$

Si λ_{MAX} es el **mayor autovalor en valor absoluto**,

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \bar{v}_k = \bar{\omega} \ \mid\ \underset{\sim}{A}\,\bar{\omega} = \lambda_{MAX}\,\bar{\omega}, \\ &\lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho(\bar{\omega}) = \lambda_{MAX}. \end{aligned}\right.$$

[en general, y casi siempre]

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Observamos que

$$\begin{cases}
\bar{v}_1 = \dfrac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_0}{|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_0|} & & = \dfrac{\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0\right|} \\[2ex]
\bar{v}_2 = \dfrac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_1}{|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_1|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0\right|}}{\left|\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^1\,\bar{v}_0\right|}\right|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0\right|} \\[2ex]
\bar{v}_3 = \dfrac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_2}{|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_2|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0\right|}}{\left|\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^2\,\bar{v}_0\right|}\right|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}^3\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^3\,\bar{v}_0\right|} \\
\quad\vdots & & \\
\bar{v}_k = \dfrac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_{k-1}}{\left|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_{k-1}\right|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^{k-1}\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^{k-1}\,\bar{v}_0\right|}}{\left|\underset{\sim}{A}\dfrac{\underset{\sim}{A}^{k-1}\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^{k-1}\,\bar{v}_0\right|}\right|} & = \dfrac{\underset{\sim}{A}^k\,\bar{v}_0}{\left|\underset{\sim}{A}^k\,\bar{v}_0\right|}
\end{cases}$$

Los autovectores forman una base. Por tanto, el vector inicial $\bar{v}_0$ puede escribirse en la forma $\bar{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{u}_i$. Luego

$$\bar{v}_k = \frac{\underset{\sim}{A}^k \, \bar{v}_0}{\left| \underset{\sim}{A}^k \, \bar{v}_0 \right|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \underset{\sim}{A}^k \, \bar{u}_i}{\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \underset{\sim}{A}^k \, \bar{u}_i \right|}.$$

Pero $\underset{\sim}{A}^k \, \bar{u}_i = \underset{\sim}{A}^{k-1} \, (\underset{\sim}{A} \, \bar{u}_i) = \lambda_i \, \underset{\sim}{A}^{k-1} \, \bar{u}_i \implies \underset{\sim}{A}^k \, \bar{u}_i = \lambda_i^k \, \bar{u}_i$. Por tanto

$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_i^k \, \bar{u}_i}{\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_i^k \, \bar{u}_i \right|} = \frac{\alpha_1 \, \lambda_1^k \, \bar{u}_1 + \alpha_2 \, \lambda_2^k \, \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \, \lambda_n^k \, \bar{u}_n}{\left| \alpha_1 \, \lambda_1^k \, \bar{u}_1 + \alpha_2 \, \lambda_2^k \, \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \, \lambda_n^k \, \bar{u}_n \right|}.$$

MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IIc)

Casos más importantes:

1. **Hay un sólo autovalor predominante**

$$|\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i < n. \quad \text{(*)}$$

2. **Hay un autovalor predominante con orden de multiplicidad p**

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-(p-1)}, \qquad |\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i \leq n - p. \quad \text{(*)}$$

3. **Hay dos autovalores predominantes de signos opuestos**

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \qquad |\lambda_n| \geq |\lambda_i| \quad \forall i.$$

(*) En general los autovalores se numeran en orden creciente ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$). Se supone (por sencillez) que el autovalor predominante (mayor en valor absoluto) es $\lambda_n > 0$. Para analizar el caso en el que el autovalor predominante es $\lambda_1 < 0$ habría que introducir las oportunas modificaciones en el estudio que se realiza a continuación (en esencia las conclusiones son las mismas, con una excepción: si el autovalor predominante es negativo, el vector $\bar{v}_k$ no converge en sentido estricto sino que tiende a oscilar entre dos vectores de sentidos opuestos).

1. **Hay un sólo autovalor predominante**

Sea $|\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i < n.$

Escribimos
$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i \le n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i}{\left|\sum_{i \le n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i\right|} = \frac{\sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \alpha_n \bar{u}_n}{\left|\sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \alpha_n \bar{u}_n\right|}.$$

Luego
$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \bar{v}_k = \bar{u}_n, \\ \lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho(\bar{u}_n) = \lambda_n. \end{cases}$$
[si $\alpha_n \neq 0$]

Notas:

- En el caso $\alpha_n = 0$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. $(\star)$
- Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales $\bar{v}_0$.

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según $\bar{u}_n$ que acabe conduciendo a la solución correcta.

2. Hay un autovalor predominante con orden de multiplicidad p

Sea $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-(p-1)}, \qquad |\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i \leq n-p.$

Escribimos $$\bar{v}_k = \frac{\displaystyle\sum_{i\leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i>n-p} \alpha_i\, \bar{u}_i}{\left|\displaystyle\sum_{i\leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i>n-p} \alpha_i\, \bar{u}_i\right|}.$$

Luego $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \bar{v}_k = \bar{\omega} \mid \underset{\sim}{A}\,\bar{\omega} = \lambda_n\,\bar{\omega}, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \rho(\bar{\omega}) = \lambda_n. \end{array}\right.$$

[si $\alpha_i \neq 0$ para algún $i > n-p$]

Notas:

- ♠ En el caso $\alpha_i = 0\ \forall i > n-p$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. $(\star)$
- ♣ Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales $\bar{v}_0$.

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según $\left\{\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, \ldots, \bar{u}_{n-(p-1)}\right\}$ que acabe conduciendo a la solución correcta.

3. Hay dos autovalores predominantes de signos opuestos

Sea $\lambda_1 = -\lambda_n, \qquad |\lambda_n| \geq |\lambda_i| \quad \forall i.$

Supongamos que $\begin{cases} \lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-(p-1)} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_q, \\ |\lambda_n| = |\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \text{para} \quad q < i \leq n-p. \end{cases}$

Escribimos $$\bar{v}_k = \frac{\displaystyle\sum_{i\leq q} \alpha_i\,(-1)^k\,\bar{u}_i + \sum_{q<i\leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i>n-p} \alpha_i\,\bar{u}_i}{\left|\displaystyle\sum_{i\leq q} \alpha_i\,(-1)^k\,\bar{u}_i + \sum_{q<i\leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i>n-p} \alpha_i\,\bar{u}_i\right|}.$$

Luego $$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \bar{v}_k = \pm\bar{\omega}_q + \bar{\omega}_p, & \begin{cases} \underset{\sim}{A}\,\bar{\omega}_q = -\lambda_n\,\bar{\omega}_q, \\ \underset{\sim}{A}\,\bar{\omega}_p = \quad \lambda_n\,\bar{\omega}_p, \end{cases} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \rho(\pm\bar{\omega}_q + \bar{\omega}_p) \neq \pm\lambda_n. \end{cases}$$

[si $\alpha_i \neq 0$ para algún $i > n-p$ y para algún $i \leq q$]

Notas:

- ♠ Obsérvese que el método no convergerá a un autovector, sino que oscilará entre dos vectores que serán combinación lineal de dos autovectores ($\bar{\omega}_p$ y $\bar{\omega}_q$).
  A partir de los valores entre los que oscila el método es posible obtener los correspondientes autovectores y sus autovalores.
- ♠ En el caso $\alpha_i = 0 \; \forall i > n-p \; \forall i \leq q$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. $(\star)$
- ♣ Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales $\bar{v}_0$.

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según $\left\{\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, \ldots, \bar{u}_{n-(p-1)}\right\}$ que acabe conduciendo a la solución correcta.

OBSERVACIONES

- En el estudio anterior se observa que el método converge en general al autovector $\bar{u}_n$ asociado al mayor autovalor en valor absoluto λ_n.
  - Una vez calculado el autovalor predominante, puede aplicarse una reducción de autovalores para obtener el autovalor siguiente.
  - Este procedimiento no puede aplicarse para obtener todos los autovalores, ya que los errores se acumulan y los resultados se degradan considerablemente cada vez que se realiza una reducción.
- Conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales antes de aceptar una solución como buena.
- El método tiene orden de convergencia lineal, con factor asintótico de convergencia

$$\text{FAC} = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right| .$$

  - Cuando los autovalores están muy separados, es decir $|\lambda_n| >> |\lambda_{n-1}|$, la velocidad de convergencia será muy elevada.
  - Cuando los autovalores están muy juntos, es decir $|\lambda_n| \approx |\lambda_{n-1}|$, la velocidad de convergencia será muy baja.

OBSERVACIONES (continuación)

- ♡ La aproximación del autovalor se obtiene mediante el Cociente de Rayleigh. Por este motivo, la convergencia al autovalor también es lineal, pero con factor asintótico de convergencia

$$\text{FAC} = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^2 .$$

- ♡ La aproximación del autovalor será mucho mejor que la aproximación del autovector.

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underset{\sim}{M} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T$.

Luego

$$\underset{\sim}{K}\ \bar{u} = \lambda\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{u} = \lambda \widehat{u}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \widehat{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}, \\ \widehat{u}\ = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{u}. \end{cases}$$

A cada vector $\bar{v}$ del problema generalizado, le corresponde un vector del problema estándar equivalente $\widehat{v} = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}$.

Por tanto, al vector unitario arbitrario $\widehat{v}_0$ del problema estándar le corresponderá el vector $\bar{v}_0$ del problema generalizado, que verifica $\widehat{v}_0 = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}_0$, $\bar{v}_0^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}_0 = 1$.

Al aplicar el Método de Mises al problema estándar equivalente se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \widehat{v}_{k+1} &= \frac{\widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{v}_k}{|\widehat{\underset{\sim}{K}}\ \widehat{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \widehat{\rho}(\widehat{v}_{k+1}) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, \ldots, \text{(hasta convergencia)}$$

Al vector $\widehat{v}_k$ del problema estándar le corresponderá el vector $\bar{v}_k$ del problema generalizado, que verifica $\widehat{v}_k = \underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}_k$, $\bar{v}_k^T \underset{\sim}{M}\ \bar{v}_k = 1$. Por tanto, lo anterior es equivalente a

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}_{k+1} &= \frac{\left[\underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}\right]\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}_k\right)}{|\left[\underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{L}^{-T}\right]\ \left(\underset{\sim}{L}^T\ \bar{v}_k\right)|} = \frac{\underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \bar{v}_k}{|\underset{\sim}{L}^{-1}\underset{\sim}{K}\ \bar{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \rho(v_{k+1}) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, \ldots, \text{(hasta convergencia)}$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

♣ Algoritmo:

Dado $\bar{v}_0 \;\Big|\; \bar{v}_0^T \bar{v}_0 = 1$

Para $k = 0, 1, \ldots$ (hasta convergencia)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{calcular} & \bar{v}_{k+1} = \dfrac{\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_k}{|\underset{\sim}{A}\,\bar{v}_k|} \qquad [\Longrightarrow \bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1} = 1] \\[2ex] \text{calcular} & \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \dfrac{\bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{A}\,\bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{A}\,\bar{v}_{k+1} \end{array} \right.$$

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

♣ PROGRAMACIÓN:

Dado $\bar{v}_0 \;\Big|\; \bar{v}_0^T \bar{v}_0 = 1$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{calcular} & \bar{w}_0 = \underset{\sim}{A}\, \bar{v}_0 \\ \text{calcular} & \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{array}\right.$$

Para $k = 0, 1, \ldots$ (hasta convergencia)

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{calcular} & \bar{v}_{k+1} = \dfrac{\bar{w}_k}{|\bar{w}_k|} \\ \text{calcular} & \bar{w}_{k+1} = \underset{\sim}{A}\, \bar{v}_{k+1} \\ \text{calcular} & \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{array}\right.$$

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

♣ Algoritmo:

Dado $\bar{v}_0 \;\Big|\; \bar{v}_0^T \underset{\sim}{M}\, \bar{v}_0 = 1$

Para $k = 0, 1, \ldots$ (hasta convergencia)

$$\begin{cases} \text{resolver} \quad \underset{\sim}{L}^T \bar{v}_{k+1} = \dfrac{\underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_k}{|\underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_k|} \qquad [\Longrightarrow \bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{M}\, \bar{v}_{k+1} = 1] \\[2ex] \text{calcular} \quad \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \dfrac{\bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{M}\, \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_{k+1} \end{cases}$$

Para ello se habrá factorizado previamente la matriz $\underset{\sim}{M}$ en la forma

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{L}^T.$$

PROBLEMA GENERALIZADO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas, $\underset{\sim}{M}$ DEF+]

♣ PROGRAMACIÓN:

Dado $\bar{v}_0 \;\Big|\; \bar{v}_0^T \underset{\sim}{M}\, \bar{v}_0 = 1$

$$\begin{cases} \text{calcular} & \bar{w}_0 = \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_0 \\ \text{calcular} & \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{cases}$$

Para $k = 0, 1, \ldots$ (hasta convergencia)

$$\begin{cases} \text{resolver} & \underset{\sim}{L}\, \bar{z}_{k+1} = \bar{w}_k \\ \text{resolver} & \underset{\sim}{L}^T \bar{y}_{k+1} = \bar{z}_{k+1} \\ \text{calcular} & \bar{v}_{k+1} = \dfrac{\bar{y}_{k+1}}{|\bar{z}_{k+1}|} \\ \text{calcular} & \bar{w}_{k+1} = \underset{\sim}{K}\, \bar{v}_{k+1} \\ \text{calcular} & \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{cases}$$

Criterio de Convergencia

$$\text{CONVERGENCIA} = \left(|\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k| \;\leq\; \max(e_u,\; r_u\,|\bar{v}_{k+1}|) \right) \text{.AND.}$$
$$\left(|\rho_{k+1} - \rho_k| \;\leq\; \max(e_\lambda,\; r_\lambda\,|\rho_{k+1}|) \right)$$

♣ La convergencia suele ser mucho más rápida en el caso del autovalor que en el caso del autovector, debido a la 3.ª propiedad del Cociente de Rayleigh.

MÉTODO DE MISES INVERSO

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas y DEF+]

♣ Se aplica el Método de Mises al problema inverso.

- Si se trata de un problema generalizado, se permutan las matrices $\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$.
- El problema estándar se considera generalizado con $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{I}$.

♣ Hay que factorizar la matriz $\underset{\sim}{K}$ en lugar de la matriz $\underset{\sim}{M}$.

- Se suele realizar en cualquier caso, por lo que el proceso no se encarece. (ejemplo: problemas de cálculo de estructuras, MEF, etc.).

♡ **Converge al autovector asociado al menor autovalor (en módulo)**.

- ES LO QUE NORMALMENTE SE REQUIERE EN INGENIERÍA.

♢ La convergencia suele ser muy rápida.

- El inverso del menor autovalor suele estar separado del inverso del siguiente. (por ejemplo $\lambda_1 = 0.001$ y $\lambda_2 = 0.01$).

MÉTODO DE MISES AJUSTABLE

[$\underset{\sim}{K}$ y $\underset{\sim}{M}$ reales simétricas y DEF+]

Dado el problema generalizado

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}\ \bar{u}_i &= \lambda_i\ \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underset{\sim}{M}\ \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad i\ ,\ j = 1\ldots, n.$$

Se pretende hallar el autovalor más próximo al valor μ. Para ello se define

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{K}' &= \underset{\sim}{M} \\ \underset{\sim}{M}' &= \underset{\sim}{K} - \mu\ \underset{\sim}{M} \end{aligned}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{K}'\ \bar{u}_i = (\lambda_i - \mu)^{-1}\ \underset{\sim}{M}'\ \bar{u}_i.$$

que equivale a realizar una traslación de valor $-\mu$ seguida de una inversión.

El mayor autovalor de este problema será $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |(\lambda_i - \mu)^{-1}| = \left(\min\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i - \mu|\right)^{-1}$.

Al aplicar el Método de Mises Directo a este problema obtendremos el valor buscado.

PROBLEMA ESTÁNDAR

[$\underset{\sim}{A}$ real simétrica]

Sea el problema

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\ \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{U} &= \underset{\sim}{I} \end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{U} &= [\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n\,], \\ \underset{\sim}{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}\right.$$

El **MÉTODO DE JACOBI** consiste en:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{A}_o = \underset{\sim}{A} \quad &\mapsto \quad \underset{\sim}{A}_{k+1} = \left(\underset{\sim}{Q}_{k+1}\right)^{-1} \underset{\sim}{A}_k\,\underset{\sim}{Q}_{k+1} \\ \underset{\sim}{P}_o = \underset{\sim}{I} \quad &\mapsto \quad \underset{\sim}{P}_{k+1} = \underset{\sim}{P}_k\,\underset{\sim}{Q}_{k+1} \end{aligned}\right\}} \quad k = 0, \dots, \text{(hasta convergencia)}$$

Si,

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1} = \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{T} \quad \text{(matrices ortogonales)} \\ &\text{las } \underset{\sim}{Q}_{k+1} \text{ se eligen } \textbf{ADECUADAMENTE} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{A}_k &= \underset{\sim}{A}_\infty = \underset{\sim}{\Lambda}, \\ \lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{P}_k &= \underset{\sim}{P}_\infty = \underset{\sim}{U}. \end{aligned}\right.$$

Algunas demostraciones previas

DP1. Las matrices semejantes entre sí tienen los mismos autovalores:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{A}\bar{u} = \lambda\bar{u} \\ \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{P}^{-1}, \\ \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{P}^{-1}\bar{u} = \lambda\bar{u}, \\ \underset{\sim}{B}\left(\underset{\sim}{P}^{-1}\bar{u}\right) = \lambda\left(\underset{\sim}{P}^{-1}\bar{u}\right), \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{B}\bar{v} = \lambda\bar{v}, \\ \text{con } \bar{v} = \underset{\sim}{P}^{-1}\bar{u}. \end{array}\right.$$

DP2. Las matrices semejantes entre sí tienen la misma traza:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} \\ \text{con } \underset{\sim}{P}^{-1} = \underset{\sim}{X} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} b_{ij} & = \displaystyle\sum_{\gamma,\beta} x_{i\gamma}a_{\gamma\beta}p_{\beta j}, \\ \operatorname{tr}(\underset{\sim}{B}) & = \displaystyle\sum_{i} b_{ii} = \sum_{i}\sum_{\gamma,\beta} x_{i\gamma}a_{\gamma\beta}p_{\beta i} \\ & = \displaystyle\sum_{\gamma,\beta} a_{\gamma\beta}\sum_{i} p_{\beta i}x_{i\gamma} = \sum_{\gamma,\beta} a_{\gamma\beta}\delta_{\beta\gamma} \\ & = \displaystyle\sum_{\gamma} a_{\gamma\gamma} = \operatorname{tr}(\underset{\sim}{A}). \end{array}\right.$$

DP3. Los cuadrados de matrices semejantes entre sí también son semejantes entre sí:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{B}^2 = \left[\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}\right]\left[\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}\right] = \underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{P}.$$

DP4. La traza del cuadrado de una matriz simétrica es igual a la suma de los cuadrados de sus coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}^2 \\ \text{con } \underset{\sim}{X}^T = \underset{\sim}{X} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_{ij} & = \displaystyle\sum_{\beta} x_{i\beta}x_{\beta j}, \\ \operatorname{tr}(\underset{\sim}{Y}) & = \displaystyle\sum_{\gamma} y_{\gamma\gamma} = \sum_{\gamma}\sum_{\beta} x_{\gamma\beta}x_{\beta\gamma} \\ & = \displaystyle\sum_{\gamma,\beta} x_{\gamma\beta}^2. \end{array}\right.$$

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

1. Las matrices $\left\{ \underset{\sim}{P}_{k+1} \right\}_{k=0,\ldots,\infty}$ son **ortogonales**:

$$\underset{\sim}{P}_{k+1} = \underset{\sim}{Q}_1 \; \ldots \; \underset{\sim}{Q}_k \; \underset{\sim}{Q}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1} = \underset{\sim}{P}_{k+1}^{T}. \quad \text{(ortogonalidad)}$$

2. Las matrices $\left\{ \underset{\sim}{A}_{k+1} \right\}_{k=0,\ldots,\infty}$ son **semejantes** a la matriz $\underset{\sim}{A}$ y **simétricas**:

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1} \; \underset{\sim}{A} \; \underset{\sim}{P}_{k+1} \quad \text{(semejanza ortogonal)} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A}_{k+1}^{T} = \underset{\sim}{A}_{k+1}.$$

3. Las matrices $\left\{ \underset{\sim}{A}_{k+1} \right\}_{k=0,\ldots,\infty}$ tienen **los mismos autovalores** que la matriz $\underset{\sim}{A}$:

$$\underset{\sim}{A} \; \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U} \; \underset{\sim}{\Lambda} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A}_{k+1} \; \underset{\sim}{U}_{k+1} = \underset{\sim}{U}_{k+1} \; \underset{\sim}{\Lambda}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{U}_{k+1} = \underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1} \underset{\sim}{U}.$$

4. Si las $\underset{\sim}{Q}_{k+1}$ se eligen **ADECUADAMENTE**, el método converge:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\gamma\neq\beta} \left(a_{\gamma\beta}^{k} \right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{A}_\infty = \underset{\sim}{\Lambda}, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{P}_k = \underset{\sim}{P}_\infty = \underset{\sim}{U}. \end{array} \right.$$

Demostraciones

1. Las matrices $\{\underset{\sim}{P}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ son **ortogonales**.

   Pues

$$\underset{\sim}{P}_{k+1} = \underset{\sim}{P}_k\, \underset{\sim}{Q}_{k+1} = \left[\underset{\sim}{P}_{k-1}\, \underset{\sim}{Q}_k\right]\, \underset{\sim}{Q}_{k+1} = \left[\left[\cdots\left[\underset{\sim}{P}_o\, \underset{\sim}{Q}_1\right]\cdots\right]\underset{\sim}{Q}_k\right]\, \underset{\sim}{Q}_{k+1}$$
$$= \left[\underset{\sim}{Q}_1\, \cdots\, \underset{\sim}{Q}_k\, \underset{\sim}{Q}_{k+1}\right].$$

   Por tanto,

$$\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1} = \left[\underset{\sim}{Q}_1\, \cdots\, \underset{\sim}{Q}_k\, \underset{\sim}{Q}_{k+1}\right]^{-1} = \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{Q}_k^{-1}\, \cdots\, \underset{\sim}{Q}_1^{-1}$$
$$= \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{T}\, \underset{\sim}{Q}_k^{T}\, \cdots\, \underset{\sim}{Q}_1^{T} = \left[\underset{\sim}{Q}_1\, \cdots\, \underset{\sim}{Q}_k\, \underset{\sim}{Q}_{k+1}\right]^{T}$$
$$= \underset{\sim}{P}_{k+1}^{T}. \quad \text{(ortogonalidad)}$$

2. Las matrices $\left\{\underset{\sim}{A}_{k+1}\right\}_{k=0,\ldots,\infty}$ son **semejantes** a la matriz $\underset{\sim}{A}$ y **simétricas**.

   Pues

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}_{k+1} &= \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{A}_k\, \underset{\sim}{Q}_{k+1} \\
&= \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1} \left[\underset{\sim}{Q}_{k}^{-1}\, \underset{\sim}{A}_{k-1}\, \underset{\sim}{Q}_{k}\right] \underset{\sim}{Q}_{k+1} \\
&= \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1} \left[\underset{\sim}{Q}_{k}^{-1} \left[\cdots \left[\underset{\sim}{Q}_{1}^{-1}\, \underset{\sim}{A}_o\, \underset{\sim}{Q}_{1}\right] \cdots\right] \underset{\sim}{Q}_{k}\right] \underset{\sim}{Q}_{k+1} \\
&= \left[\underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{Q}_{k}^{-1} \cdots \underset{\sim}{Q}_{1}^{-1}\right] \underset{\sim}{A} \left[\underset{\sim}{Q}_{1} \cdots \underset{\sim}{Q}_{k}\, \underset{\sim}{Q}_{k+1}\right] \\
&= \underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{P}_{k+1}. \quad \text{(semejanza ortogonal)}
\end{aligned}$$

   Por tanto,

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}_{k+1}^{T} &= \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{P}_{k+1}\right]^{T} = \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{T}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{P}_{k+1}\right]^{T} \\
&= \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{T}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{P}_{k+1}\right] = \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{P}_{k+1}\right] \\
&= \underset{\sim}{A}_{k+1}.
\end{aligned}$$

3. Las matrices $\{\underset{\sim}{A}_{k+1}\}_{k=0,\ldots,\infty}$ tienen **los mismos autovalores** que la matriz $\underset{\sim}{A}$.
   Pues

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \quad & \Longrightarrow \quad \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}\,\underset{\sim}{A}_{k+1}\,\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\right]\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\
& \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A}_{k+1}\,\left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\,\underset{\sim}{U}\right] = \left[\underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\,\underset{\sim}{U}\right]\,\underset{\sim}{\Lambda} \\
& \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A}_{k+1}\,\underset{\sim}{U}_{k+1} = \underset{\sim}{U}_{k+1}\,\underset{\sim}{\Lambda}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{U}_{k+1} = \underset{\sim}{P}_{k+1}^{-1}\underset{\sim}{U}.
\end{aligned}$$

Elección de las matrices $\underset{\sim}{Q}_{k+1}$

1. Se explora la parte superior de $\underset{\sim}{A}_k$ para hallar $a_{ij}{}^k = a_{ji}{}^k = \max\limits_{i<j} \{ |a_{ij}^k| \}$.

$$\underset{\sim}{A}_k = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccc} a_{11}^k & \cdots & a_{1i}^k & \cdots & a_{1j}^k & \cdots & a_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^k & \cdots & a_{ii}^k & \cdots & a_{ij}^k & \cdots & a_{in}^k \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}^k & \cdots & a_{ji}^k & \cdots & a_{jj}^k & \cdots & a_{jn}^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & \cdots & a_{ni}^k & \cdots & a_{nj}^k & \cdots & a_{nn}^k \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \text{fila } i \\ \\ \longrightarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{columna } i & & \text{columna } j & & \end{array} & \end{array} .$$

2. Se calculan

$$\left.\begin{aligned} p &= 2\, a_{ij}^k \ \operatorname{sgn}(a_{ii}^k - a_{jj}^k) \\ q &= |a_{ii}^k - a_{jj}^k| \\ r &= \sqrt{p^2 + q^2} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \frac{p}{q}, \\ \cos(2\alpha) &= \frac{q}{r}, \\ \operatorname{sen}(2\alpha) &= \frac{p}{r}, \\ \cos(\alpha) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{q}{r}\right)}, \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{p}{2\, r\ \cos(\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

(*) Lo que equivale a

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\, a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\, a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k}\right), \quad \text{con } -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Vc)

3. Se construye

$$
\underset{\sim}{Q}_{k+1} = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos(\alpha) &&&& \operatorname{sen}(\alpha) &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \operatorname{sen}(\alpha) &&&& -\cos(\alpha) &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\longrightarrow \text{fila } i \\
\\
. \\
\\
\longrightarrow \text{fila } j \\
\\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
 &&& \downarrow &&&& \downarrow &&& \\
&&& \text{columna } i &&&& \text{columna } j &&&
\end{array}
&
\end{array}
$$

Estas matrices verifican $\underset{\sim}{Q}_{k+1}^{-1} = \underset{\sim}{Q}_{k+1}^{T} = \underset{\sim}{Q}_{k+1}$ (son **AUTOINVERSAS**).

OBSERVACIONES

1. Debido a la **FORMA** de $\underset{\sim}{Q}_{k+1}$, entre $\underset{\sim}{A}_k$ y $\underset{\sim}{A}_{k+1} = \left(\underset{\sim}{Q}_{k+1}\right)^{-1} \underset{\sim}{A}_k \, \underset{\sim}{Q}_{k+1}$ sólo cambian los componentes de las filas i y j.
2. En particular

$$
\begin{aligned}
a_{ii}^{k+1} &= a_{ii}^{k} \cos^2\alpha + a_{jj}^{k} \operatorname{sen}^2\alpha + 2\, a_{ij}^{k} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,\\
a_{jj}^{k+1} &= a_{ii}^{k} \sin^2\alpha + a_{jj}^{k} \cos^2\alpha - 2\, a_{ij}^{k} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,\\
a_{ij}^{k+1} &= \left(a_{ii}^{k} - a_{jj}^{k}\right) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - a_{ij}^{k} \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right),\\
a_{ji}^{k+1} &= a_{ij}^{k+1}.
\end{aligned}
$$

3. Para el valor elegido de α se verifica

$$
\boxed{a_{ij}^{k+1}} = \boxed{a_{ji}^{k+1}} = 0.
$$

Por tanto,

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} a_{11}^{k} & \cdots & a_{1i}^{k+1} & \cdots & a_{1j}^{k+1} & \cdots & a_{1n}^{k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^{k+1} & \cdots & a_{ii}^{k+1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in}^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}^{k+1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{jj}^{k+1} & \cdots & a_{jn}^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{k} & \cdots & a_{ni}^{k+1} & \cdots & a_{nj}^{k+1} & \cdots & a_{nn}^{k} \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{columna } i & & \text{columna } j & & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \text{fila } i \\ \\ \longrightarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

4. Para el valor elegido de α se verifica

$$\left(\boxed{a_{ii}^{k+1}}\right)^2 + \left(\boxed{a_{jj}^{k+1}}\right)^2 = \left(\boxed{a_{ii}^{k}}\right)^2 + \left(\boxed{a_{jj}^{k}}\right)^2 + 2\left(\boxed{a_{ij}^{k}}\right)^2 .$$

5. Luego, si $D_k = \sum_{\gamma=\beta} \left(a_{\gamma\beta}^{k}\right)^2$, entonces

$$D_{k+1} = D_k + 2\left(a_{ij}^{k}\right)^2 \geq D_k. \quad (\star)$$

(*) Pues $a_{\gamma\gamma}^{k+1} = a_{\gamma\gamma}^{k}$ para $\gamma \notin \left\{i, j\right\}$.

6. Luego, si $\Phi_k = \sum_{\gamma \neq \beta} \left(a^k_{\gamma\beta} \right)^2$, entonces

$$\Phi_{k+1} \geq 0,$$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - 2 \left(a^k_{ij} \right)^2 \leq \Phi_k. \qquad (\star)$$

$(\star)$ Pues $\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{A}^2_{k+1} \right) = \mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{A}^2_k \right) = \mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{A}^2 \right)$ por ser semejantes.

Además, si $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}^2$ con $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}^T$, entonces $\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{Y}\right) = \sum_{\gamma,\beta} \left(x_{\gamma\beta} \right)^2 = \sum_{\gamma=\beta} \left(x_{\gamma\beta} \right)^2 + \sum_{\gamma\neq\beta} \left(x_{\gamma\beta} \right)^2$ (por DP4).

Por tanto, $D_{k+1} + \Phi_{k+1} = D_k + \Phi_k = \mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{A}^2 \right)$.

7. Además, $\left(a_{ij}^{k}\right)^2 \geq \dfrac{\Phi_k}{n^2 - n}$, pues el máximo es mayor o igual que la media.

8. En consecuencia

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{k+1} \geq 0, \\ \\ \Phi_{k+1} = \Phi_k - 2\left(a_{ij}^{k}\right)^2 \leq \Phi_k \underbrace{\left(\dfrac{n^2 - n - 2}{n^2 - n}\right)}_{\leq 1}, \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k = 0, \\ \\ \lim\limits_{k\to\infty} D_k = \operatorname{tr}\left(\underset{\sim}{A}^2\right). \end{array}\right.$$