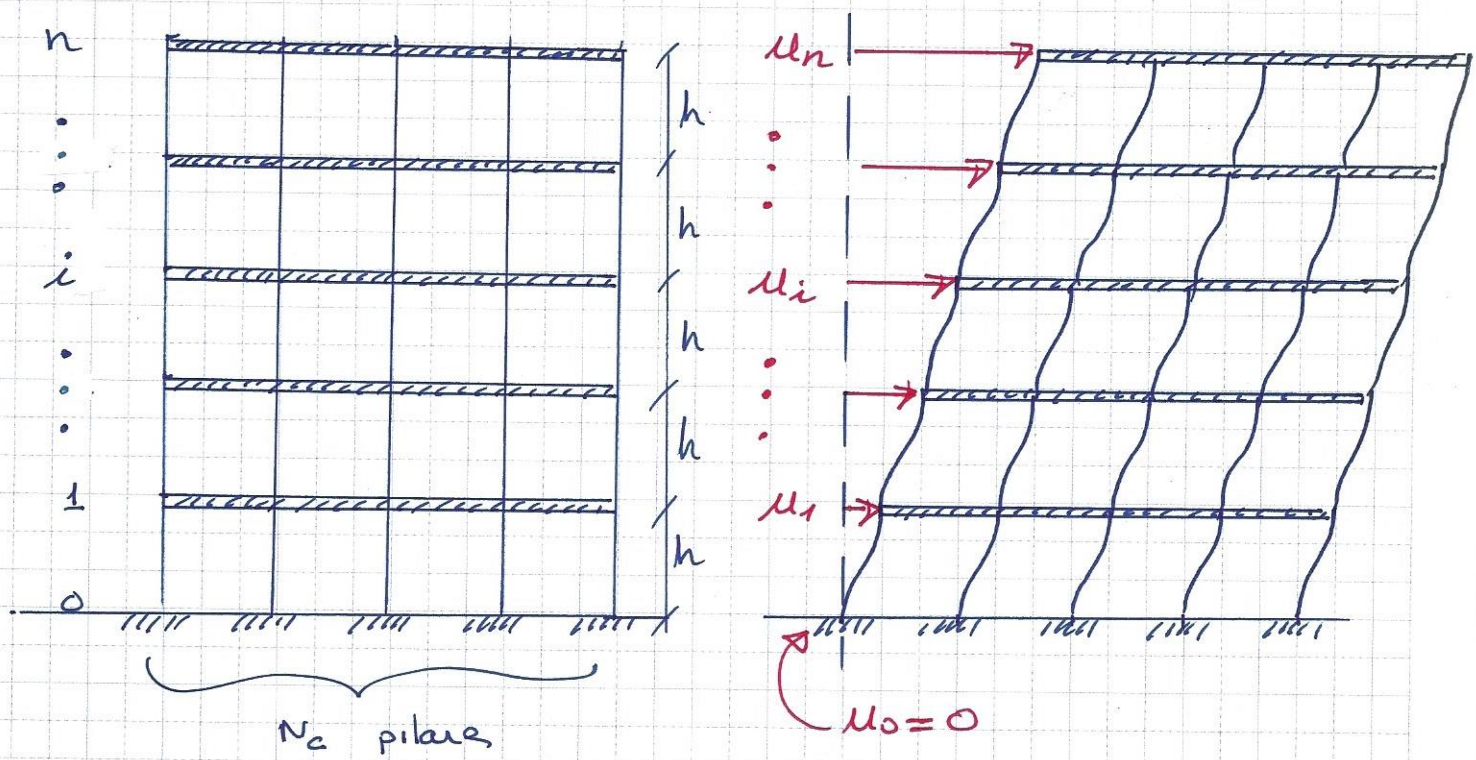
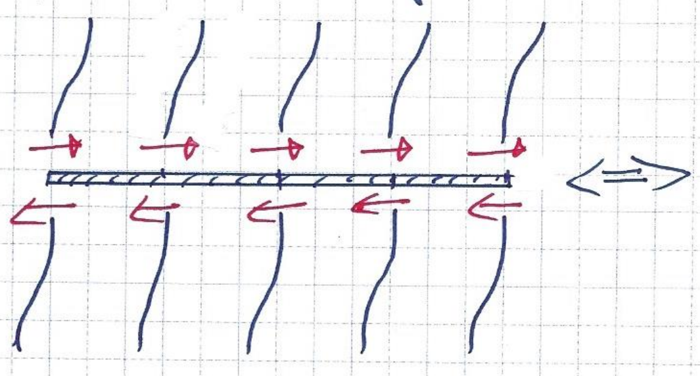
Ejemplo 1: Comportamiento dinámico de un edificio (VIBRACIONES LIBRES)

(Se supone que los forjados son infinitamente rígidos)



Ley de Newton aplicada al forjado i-ésimo:



$\Longleftrightarrow$

$$F_i^+ = K\,(u_{i+1} - u_i)$$

m (*)

$$F_i^- = K\,(u_i - u_{i-1})$$

con $K = \dfrac{12EI}{h^3} \cdot N_c$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\,\ddot{u}_i = -K\,(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) & ; \; i = 1, \ldots, n-1 \\ m\,\ddot{u}_n = -K\,(-u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$

(*) m = masa del forjado (se suponen todos iguales)

Matricialmente:

$$m\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\\ \vdots\\ \ddot{u}_n\end{Bmatrix} = -k\begin{bmatrix}2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1\\ & & & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{Bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{gathered}\underset{\sim}{M}\,\ddot{\bar{u}} + \underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \bar{0},\\ \text{con } \underset{\sim}{M} = m\underset{\sim}{I},\ \underset{\sim}{K} = k\begin{bmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -1 & 2 & -1\\ & & -1 & 1\end{bmatrix},\ \bar{u} = \begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{Bmatrix}\end{gathered}}$$

Análisis MODAL

Buscamos soluciones tipo $\bar{u} = \bar{a}\,e^{j\omega t}$,

siendo $\bar{a} = \begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{Bmatrix}$ las amplitudes y ω la frecuencia.

$$\Rightarrow \ddot{\bar{u}} = -\omega^2\,\bar{a}\,e^{j\omega t}$$

luego $\underset{\sim}{K}\,\bar{a}\,e^{j\omega t} - \omega^2\,\underset{\sim}{M}\,\bar{a}\,e^{j\omega t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{gathered}\underset{\sim}{K}\,\bar{a} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{a}\\ \text{con } \omega = \lambda^{1/2}\end{gathered}}$$

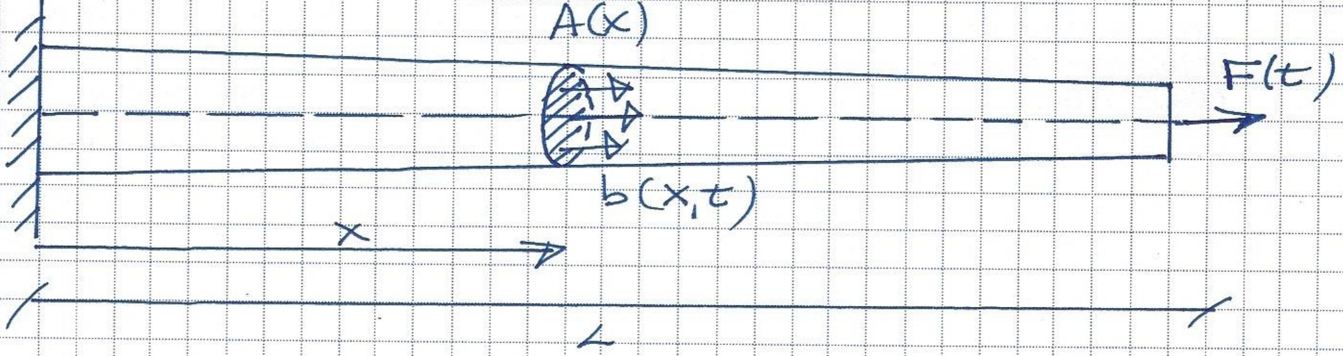
$\bar{a} \equiv$ forma propia de vibración

$\omega \equiv$ frecuencia propia de vibración (*)

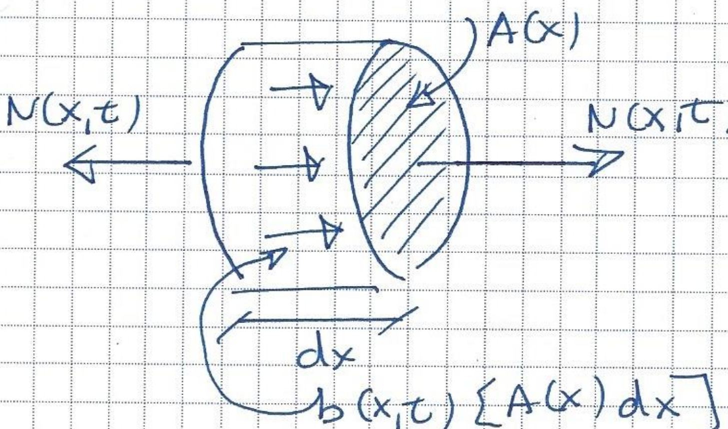
(*) Interesa calcular $\lambda_1 = \min_{i=1,n}\{\lambda_i\}$ y $\bar{a}_1$

pues $\omega_1 = \lambda_1^{1/2}$ es la frecuencia FUNDAMENTAL

Ejemplo 2: Vibración longitudinal de una barra (*)



Ley de Newton aplicada a una rebanada:



$$\begin{cases} N = A\sigma \\ \sigma = E\,\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left(\cancel{N} + \frac{\partial N}{\partial x}dx\right) - \cancel{N} + bA\,dx = \overbrace{\rho\,[A\,dx]}^{dm}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde $u(x,t)$ = desplazamiento $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ = aceleración

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(AE\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + bA = \rho A \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ;\ x \in (0,L) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t > 0 \\[2ex] \text{C.I.} \quad t = 0 \Rightarrow \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x) \end{cases} ;\ x \in [0,L] \\[4ex] \text{C.C.} \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0 \\ x = L \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \dfrac{F(t)}{AE} \end{cases} ;\ t > 0 \end{array}}$$

(*) Propagación del sonido

Vibraciones Libres

$b = 0$, $F = 0$ ⟵ Sin cargas

Suponemos $A = cte.$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{tt} = (E/\rho)\, u_{xx} \quad ; x \in (0, L) ; t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \ , \ u_x(L,t) = 0 \end{array}}$$

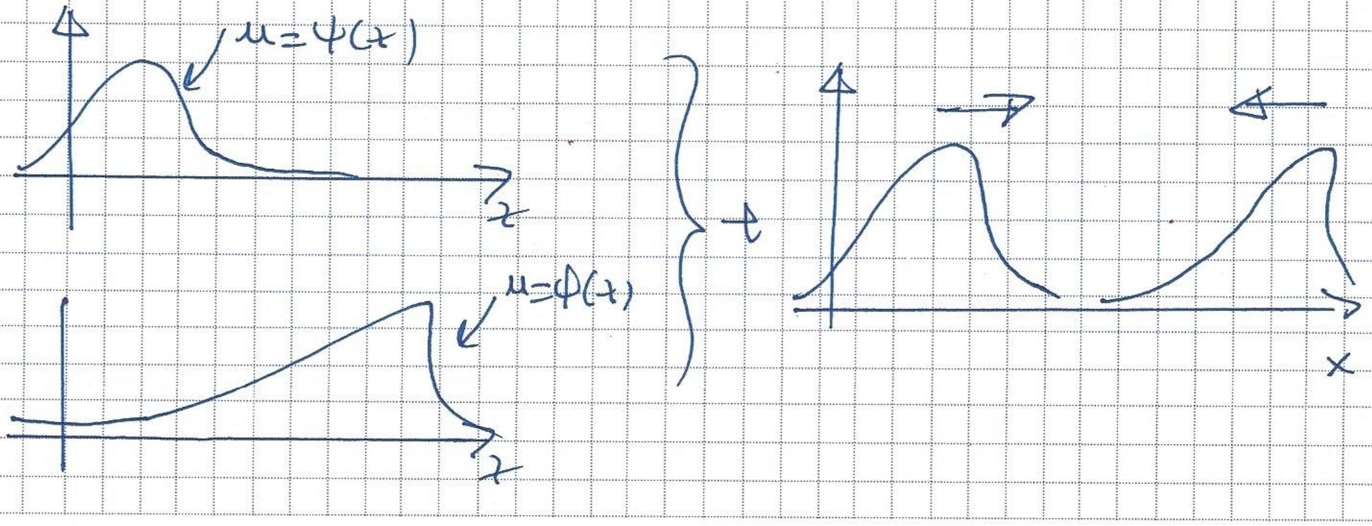
Solución general

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ c = \sqrt{E/\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u = \varphi(x - ct) + \phi(x + ct)}$$

Velocidad del sonido

⟹ Es la superposición de 2 ondas:

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \varphi(z),\ z = x - ct & \longrightarrow \text{Se desplaza hacia la derecha con velocidad } c; \\ u = \phi(z),\ z = x + ct & \longrightarrow \text{Se desplaza hacia la izquierda con velocidad } c; \end{array}\right.$$



Frecuencias y Modos propios

Sea $u(x,t) = a(x)\, e^{j\omega t} \rightarrow \begin{cases} u_{tt} = -\omega^2 a(x) e^{j\omega t} \\ u_{xx} = a_{xx}\, e^{j\omega t} \end{cases}$

Luego $u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightsquigarrow -\omega^2 a\, \cancel{e^{j\omega t}} = c^2 a_{xx}\, \cancel{e^{j\omega t}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_{xx} = -\lambda a \quad , \lambda = (\omega/c)^2 \\ a(0) = 0 \quad , a_x(L) = 0 \end{array}}$$

Sol. analítica: $a = A\cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \\ a_x(L) = -\lambda A \operatorname{sen}(\lambda L) + \lambda B \cos(\lambda L) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \underbrace{\cos(\lambda L) = 0}_{\text{ecuación de frecuencias}} \iff \lambda L = \pi/2 + k\pi \end{cases}$$

Luego:

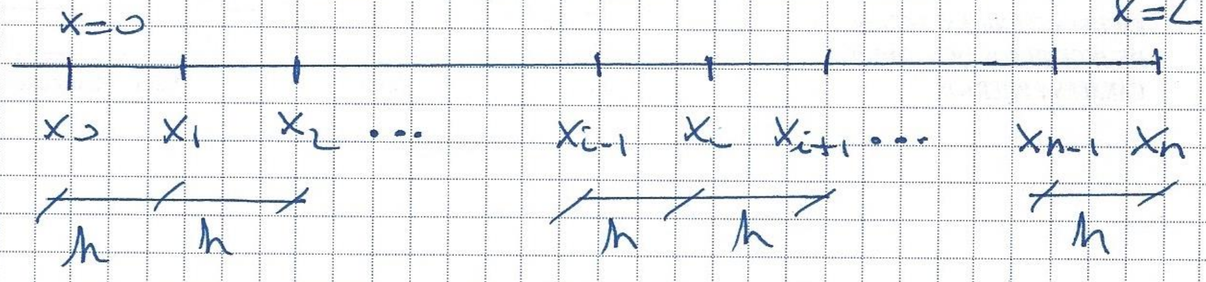
$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_k = \frac{1}{L}\left(\pi/2 + k\pi\right) \quad ; k = 0, 1, \ldots, \infty \\ \omega_k = c\sqrt{\lambda_k} \quad , c = \sqrt{E/\rho} \qquad (*) \\ u_k(x,t) = \big(\underbrace{B_k \operatorname{sen}(\lambda_k x)}_{\text{modos propios}}\big)\, e^{j\omega_k t} \end{array}}$$

$\uparrow$ frecuencias propias

(*) Mayor interés $\rightsquigarrow$ frecuencias más bajas

Sol. numérico

$h = L/n$



$$\begin{cases} a_{xx}\Big|_{x=x_i} = \dfrac{a(x_{i-1}) - 2a(x_i) + a(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2) \\[2ex] a_x\Big|_{x=x_n} = \dfrac{-a(x_{n-1}) + a(x_{n+1})}{2h} + O(h^2) \end{cases}$$

punto fantasma

Luego:

$$\frac{a(x_{i-1}) - 2a(x_i) + a(x_{i+1})}{h^2} + \lambda a(x_i) = \tau(x_i)$$

$$\tau(x_i) = O(h^2)$$

Despreciamos errores locales de truncamiento $\Rightarrow a(x_i) \approx \hat{a}_i$

$$\Rightarrow \frac{\hat{a}_{i-1} - 2\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}}{h^2} + \lambda \hat{a}_i = 0 \quad ; i = 1, \dots, n$$

$$\text{c.c.} \Rightarrow \frac{-\hat{a}_{n-1} + \hat{a}_{n+1}}{2h} = 0 \Rightarrow \hat{a}_{n+1} = \hat{a}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{a}_n \end{Bmatrix} = (\lambda h^2) \begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{a}_n \end{Bmatrix}$$

Finalmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{a}_n \end{Bmatrix}}_{\bar{a}} = \mu \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{a}_n \end{Bmatrix}}_{\bar{a}}$$

con $\mu = \lambda h^2$, $h = L/N$

$\underset{\sim}{K}$, $\underset{\sim}{M}$ → SIM, DEF+ ⟹ n autovalores reales, positivos

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{K}\, \bar{a}_K = \mu_K \underset{\sim}{M}\, \bar{a}_K \quad , \quad K = 1, \ldots, n$$

$$\lambda_K = \mu_K / h^2 \, ,$$

$$\omega_K = c\sqrt{\lambda_K} \quad , \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

donde
$$\begin{cases} \omega_K \equiv \text{frecuencias propias} \quad (*) \\ \bar{a}_K \equiv \text{modos propios} \end{cases}$$

(*) Mayor interés → frecuencias más bajas ⟺ autovalores más pequeños