Problema ESTÁNDAR

$$\underset{\sim}{A}\,\overline{u} = \lambda\,\overline{u} \iff \left[\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right]\overline{u} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})}_{\text{polinomio de grado } n \text{ en } \lambda} = 0$$

En teoría:

$$P_n(\lambda) = \det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})$$

autovalores

$\longrightarrow$ obtener λ_k, $k=1,\dots,n$ / $P_n(\lambda_k)=0$

$\longrightarrow$ obtener $\overline{u}_k$, $k=1,\dots,n$ / $(\underset{\sim}{A} - \lambda_k \underset{\sim}{I})\overline{u}_k = 0$

autovectores

- Este procedimiento es inviable para matrices de tamaño medio o grande. (*)

- Debemos buscar MÉTODOS NUMÉRICOS

- ¿Nos interesan todos los autovalores / autovectores?

Respuesta: en problemas $\begin{cases} \text{pequeños} \rightarrow \text{sí} \\ \text{grandes} \rightarrow \text{NO} \end{cases}$

(*) En realidad sólo podemos aplicarlo a matrices 3x3 o 4x4, como mucho, salvo que la matriz tenga alguna forma muy especial que facilite el cálculo

Problema generalizado

Normalmente, en Ingeniería:

$$\underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u} \iff \left[\underset{\sim}{K} - \lambda \underset{\sim}{M}\right]\bar{u} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det\left(\underset{\sim}{K} - \lambda\underset{\sim}{M}\right)}_{\text{polinomio de grado } n \text{ en } \lambda} = 0$$

En teoría:

autovalores

$$P_n(\lambda) = \det\left(\underset{\sim}{K} - \lambda\underset{\sim}{M}\right)$$

- → obtener λ_k, $k = 1, \ldots, n$ / $P_n(\lambda_k) = 0$
- → obtener $\bar{u}_k$, $k = 1, \ldots, n$ / $\left(\underset{\sim}{K} - \lambda_k \underset{\sim}{M}\right)\bar{u}_k = 0$

autovectores

- Este procedimiento es inviable para matrices de tamaño medio o grande (*)
- Debemos buscar MÉTODOS NUMÉRICOS (son los mismos para los dos problemas)
- ¿Nos interesan todos los autovalores/autovectores?

  Respuesta: en problemas { pequeños → sí ; grandes → NO }

(*) En realidad sólo podemos aplicarlo a matrices 2x2 o 3x3 ...

Estrategia

1) Analizar la relación entre los dos problemas

$\underset{\sim}{A}\,\bar{u} = \lambda\,\bar{u} \Longrightarrow$ caso particular de $\underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u}$

con $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{I}$

$\underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u} \Longrightarrow$ se puede convertir en un problema equivalente

$\hat{\underset{\sim}{K}}\,\hat{u} = \lambda\,\hat{u}$ (*)

2) Desarrollar métodos para $\underset{\sim}{A}\,\bar{u} = \lambda\,\bar{u}$

3) Aplicarlos a $\hat{\underset{\sim}{K}}\,\hat{u} = \lambda\,\hat{u}$

Si es posible, evitaremos trabajar con $\hat{\underset{\sim}{K}}$, $\hat{u}$
Haremos las operaciones equivalentes sobre $\underset{\sim}{K}$, $\bar{u}$

(*) Por ejemplo:

$$\underset{\sim}{K}\,\bar{u} = \lambda\,\underset{\sim}{M}\,\bar{u} \rightsquigarrow \underbrace{\underset{\sim}{M}^{-1}\,\underset{\sim}{K}}_{\hat{\underset{\sim}{K}}}\,\bar{u} = \lambda\,\bar{u}$$

pero $\hat{\underset{\sim}{K}}$ no es simétrica $\Longrightarrow$ Hay que buscar otro método