UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

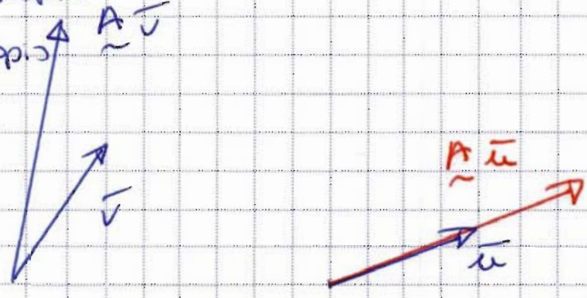
Sea $\underset{\sim}{A} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ $\quad a_{ij} \in \mathbb{R}$

PROBLEMA STANDARD (de autovalores/valores propios)

Hallar $\bar{u}, \lambda$ tales que

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\bar{u} = \lambda \bar{u}} \rightarrow \begin{cases} \bar{u} = \text{autovector/vector propio} \\ \lambda = \text{autovalor / valor propio} \end{cases}$$

- Interpretación Geométrica:



$\underset{\sim}{A}\bar{u} \parallel \bar{u}$, $\lambda \rightarrow$ coef. de amplificación
(si $\lambda < 0$ se invierte el sentido)

- Interés del problema:
  - Matemático: diagonalización por semejanza, etc.
  - Físico: direcciones principales (de inercia, etc...)
  - Ingenieril: PROBLEMAS DINÁMICOS
    - ↳ $\begin{cases} \bar{u} \equiv \text{formas propias} \\ \lambda \equiv \text{frecuencias/periodos propios} \end{cases}$

En general nos interesan las soluciones reales del problema.

transformación por semejanza

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{A}\bar{u} = \lambda\bar{u} \\ \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{C} \iff \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{C}^{-1} = \underset{\sim}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{C}^{-1}\bar{u} = \lambda\bar{u} \Rightarrow \underset{\sim}{B}\,(\overbrace{\underset{\sim}{C}^{-1}\bar{u}}^{\bar{v}}) = \lambda(\overbrace{\underset{\sim}{C}^{-1}\bar{u}}^{\bar{v}})$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{B}\bar{v} = \lambda\bar{v} \quad \text{con} \quad \bar{v} = \underset{\sim}{C}^{-1}\bar{u}$$

Luego, matrices semejantes $\Rightarrow$ los mismos autovalores

UNIVERSIDADE DA CORUÑA
ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS, CANAIS E PORTOS
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Nome / Nombre:
Materia:
Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

Polinomio Característico

$$\underset{\sim}{A}\,\bar{u} = \lambda \bar{u} \iff (\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})\,\bar{u} = 0 \iff \overbrace{\boxed{\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0}}^{\text{Ecuación característica}}$$

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = \det \begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_n\lambda^n, \quad \text{con } b_n = (-1)^n$$

$$= P_n(\lambda) \equiv \text{POLINOMIO CARACTERÍSTICO}$$

$P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow$ $\exists \{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n} \,/\, P_n(\lambda_i) = 0$

↳ $\left\{\begin{array}{l} \text{– Reales} \\ \text{– Complejas Conjugadas} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Simple} \\ \text{Múltiple} \end{array}\right\}$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \rightsquigarrow (\underset{\sim}{A} - \lambda_i \underset{\sim}{I})\,\bar{u}_i = \bar{0}$

↳ – $\in \mathbb{R}^n$
– Indeterminado (al menos en módulo)

Propiedades

1) $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{A}^T$ tienen el mismo $P_n(\lambda)$

2) CARDANO: $\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j = b_n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^n b_n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = b_0 = P_n(0) = \det(\underset{\sim}{A}) \rightsquigarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\underset{\sim}{A}) \\ (-1)^1 b_n \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}\right.$$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

*ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS*

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

3) Autovalores distintos $\Rightarrow$ Autovectores L.I.

Sea $\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i$; $i = 1, p$

con $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i, j$

Supongamos $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}$ L.I. con $r < p$

Si $\bar{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \bar{u}_i \Rightarrow \underbrace{\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_{r+1}}_{\lambda_{r+1}\bar{u}_{r+1}} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \underbrace{\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i}_{\lambda_i \bar{u}_i}$

$\Rightarrow \overbrace{\lambda_{r+1} \sum_{i=1}^{r} \beta_i \bar{u}_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \beta_i \bar{u}_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} \beta_i \bar{u}_i = \bar{0}$

$\Rightarrow \beta_i = 0 \quad \forall i$ ABSURDO

Luego $\bar{u}_{r+1}$ es L.I. de las anteriores.

Por inducción $\rightarrow \{\bar{u}_i\}_{i=1,p}$ son L.I.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS, CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Data / *Fecha*: / /

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

4) n autovectores L.I. $\Longrightarrow$ DIAGONALIZACIÓN por SEMEJANZA

$$\underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\sim}{A}\underbrace{\left[\bar{u}_1 \,\vdots\, \bar{u}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \bar{u}_n\right]}_{\underset{\sim}{U}} = \underbrace{\left[\bar{u}_1 \,\vdots\, \bar{u}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \bar{u}_n\right]}_{\underset{\sim}{U}}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Delta}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Delta}$$

$\{\bar{u}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ L.I. $\Longleftrightarrow$ $\underset{\sim}{U}$ tiene inversa.

Luego
$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Delta}\,\underset{\sim}{U}^{-1} \\ \underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{U}^{-1}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \underset{\sim}{U} = \left[\bar{u}_1 \,\vdots\, \bar{u}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \bar{u}_n\right] \\ \underset{\sim}{\Delta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrices Hermíticas (simétricas, si son de coeficientes reales)

$\underset{\sim}{A}$ se dice HERMÍTICA si $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^*$ ($\underset{\sim}{A}^*$ = traspuesta conjugada)

NOTA: Si $\underset{\sim}{A}$ es una matriz de coeficientes reales,

$$\underset{\sim}{A}^* = \underset{\sim}{A}^T \Rightarrow \left[\underset{\sim}{A} \text{ HERMÍTICA} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \text{ SIMÉTRICA}\right]$$

PROPIEDADES

1) Todos los autovalores son reales.

$$\underset{\sim}{A}\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \Rightarrow (\underset{\sim}{A}\bar{u}_i)^* = (\lambda_i \bar{u}_i)^*$$
$$\Rightarrow \bar{u}_i^* \underset{\sim}{A}^* = \lambda_i^* \bar{u}_i^*$$
$$\Rightarrow \bar{u}_i^* \underset{\sim}{A} = \lambda_i^* \bar{u}_i^*$$
$$\Rightarrow \bar{u}_i^* \underset{\sim}{A} \bar{u}_i = \lambda_i^* \bar{u}_i^* \bar{u}_i$$
$$\Rightarrow \bar{u}_i^* \lambda_i \bar{u}_i = \lambda_i^* \bar{u}_i^* \bar{u}_i$$
$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_i^*)\bar{u}_i^* \bar{u}_i = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_i^*)\,|\bar{u}_i|^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \Rightarrow \boxed{\lambda_i \in \mathbb{R}}$$

2) Autovalores distintos $\Rightarrow$ autovectores ortogonales

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{A}\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \\ \underset{\sim}{A}\bar{u}_j = \lambda_j \bar{u}_j \\ \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{u}_j^* \underset{\sim}{A} \bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_j^* \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^* \underset{\sim}{A}^* \bar{u}_j = \lambda_i \bar{u}_i^* \bar{u}_j \\ \bar{u}_i^* \underset{\sim}{A} \bar{u}_j = \lambda_i \bar{u}_i^* \bar{u}_j \\ \bar{u}_i^* \lambda_j \bar{u}_j = \lambda_i \bar{u}_i^* \bar{u}_j \end{array}\right.$$

$$(\lambda_j - \lambda_i)\bar{u}_i^* \bar{u}_j = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{u}_i^* \bar{u}_j = 0}$$

3) Autovalor múltiple de orden p $\Rightarrow$
subespacio de autovectores de orden p
(en el que pueden elegirse "p" autovectores ortogonales
entre sí y respecto a los autovectores de los otros autovalores)

Ver: F.B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics,
pp. 45-47, Dover Pub. Inc., New York (1992)

4) $\exists \{\lambda_i\}_{i=1,n}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$
$\exists \{\bar{u}_i\}_{i=1,n}$, $\bar{u}_i^* \bar{u}_j = \delta_{ij}$ $\Big\}$ $\underset{\sim}{A}\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i$, $i=1,\ldots,n$

(para ello se normaliza cada vector propio, dividiéndolo por su módulo, para que sea unitario)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\ \underset{\sim}{U}^*\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{I} \end{cases}$$

5) Si $\underset{\sim}{A}$ es real, $\underset{\sim}{A}^* = \underset{\sim}{A}^T \Rightarrow \underset{\sim}{A}$ es simétrica, y

- tiene n autovalores <u>reales</u> $\{\lambda_i\}_{i=1,n}$
- " " autovectores <u>reales</u> ortonormales $\{\bar{u}_i\}_{i=1,n}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \underset{\sim}{A}\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i & i=1,\ldots,n \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j = \delta_{ij} & \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda} \\ \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{I} \end{cases}$$

Luego $\begin{cases} \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{U}^T \\ \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{U} \end{cases}$ con $\underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{I} \longrightarrow$ Diagonalización por semejanza ortogonal

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

Matrices definidas

Definición

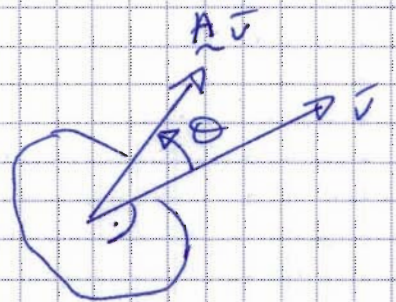
$$\bar{v}^T \underset{\sim}{A}\, \bar{v} > 0 \quad \forall \bar{v} \neq \bar{0} \iff \underset{\sim}{A} \text{ DEF } +$$

$$\geq \iff \underset{\sim}{A} \text{ SEMI-DEF } +$$

$$< 0 \iff \underset{\sim}{A} \text{ DEF } -$$

$$\leq 0 \iff \underset{\sim}{A} \text{ SEMI-DEF } -$$

Interpretación Geométrica



$$\theta < \pi/2 \iff \underset{\sim}{A} \text{ DEF}+$$

Equivalencias

$$\underset{\sim}{A} \left\{ \begin{array}{l} \text{DEF } - \\ \text{SEMI-DEF } - \end{array} \right\} \iff (-\underset{\sim}{A}) \left\{ \begin{array}{l} \text{DEF } + \\ \text{SEMI-DEF } + \end{array} \right\}$$

Matrices Definidas Simétricas

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T \Rightarrow \quad \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \quad ; i = 1, \dots, n$$

$$\bar{u}_i^T \bar{u}_j = \delta_{ij}$$

$$\underset{\sim}{A} \text{ DEF}+ \rightarrow \underbrace{\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i}_{>0} = \lambda_i \underbrace{\bar{u}_i^T \bar{u}_i}_{>0} \Rightarrow \underset{\sim}{\lambda_i > 0 \ \forall i}$$

luego $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

$$\underset{\sim}{A} \text{ SEMIDEF}+ \Rightarrow \underbrace{\bar{u}_i^T \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i}_{\geq 0} = \lambda_i \underbrace{\bar{u}_i^T \bar{u}_i}_{>0} \Rightarrow \underset{\sim}{\lambda_i \geq 0 \ \forall i}$$

Sea $\bar{v} = \sum_j \beta_j \bar{u}_j \ / \ \bar{v}^T \underset{\sim}{A}\,\bar{v} = 0$

$$\Rightarrow \left(\sum_j \beta_j \bar{u}_j\right)^T \underset{\sim}{A} \left(\sum_i \beta_i \bar{u}_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} \beta_j \beta_i \underbrace{\bar{u}_j^T \underset{\sim}{A}\,\bar{u}_i}_{\bar{u}_j^T(\lambda_i \bar{u}_i)} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} \lambda_i \beta_j \beta_i \underbrace{\bar{u}_j^T \bar{u}_i}_{\delta_{ij}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \lambda_i \beta_i^2 = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\text{Algún } \lambda_i = 0}$$

luego $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

Propiedades de la Matrices definidas positivas

$\underset{\sim}{A}$ DEF + $\Rightarrow$

1) todos los autovalores > 0
2) Los coeficientes de $p_n(\lambda)$ alternan sus signos
3) toda submatriz principal es DEF +
4) toda " " tiene determinante > 0