CONVECCIÓN – DIFUSIÓN 1D (ESTACIONARIO)

$$\underbrace{-\rho\gamma u_{xx}}_{\text{término difusivo}} + \underbrace{\rho v u_x}_{\text{término convectivo}} = b(x) \quad ; \; x \in (x_I, x_F) \leftarrow \text{EDP}$$

$\rho \equiv$ densidad , $\gamma \equiv$ difusividad

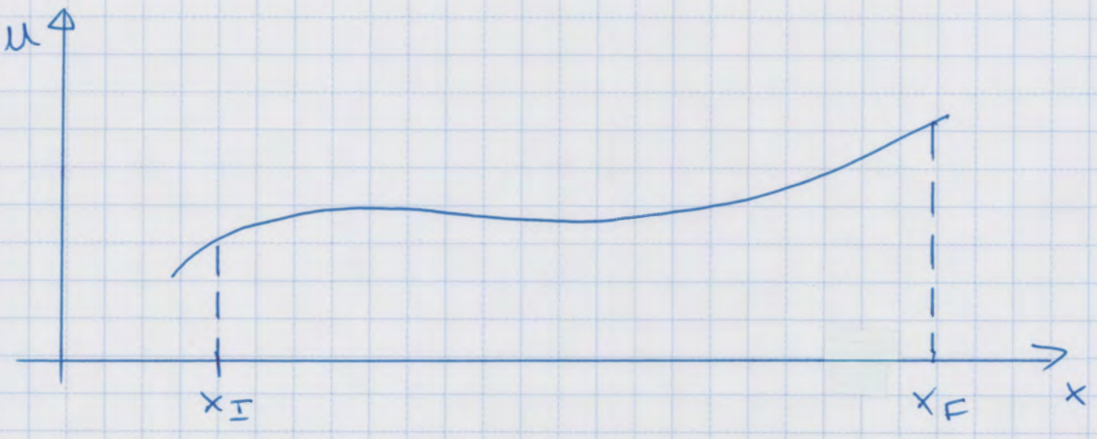
$v \equiv$ velocidad del medio , $b(x) \equiv$ fuente

1) Condiciones de contorno tipo DIRICHLET:

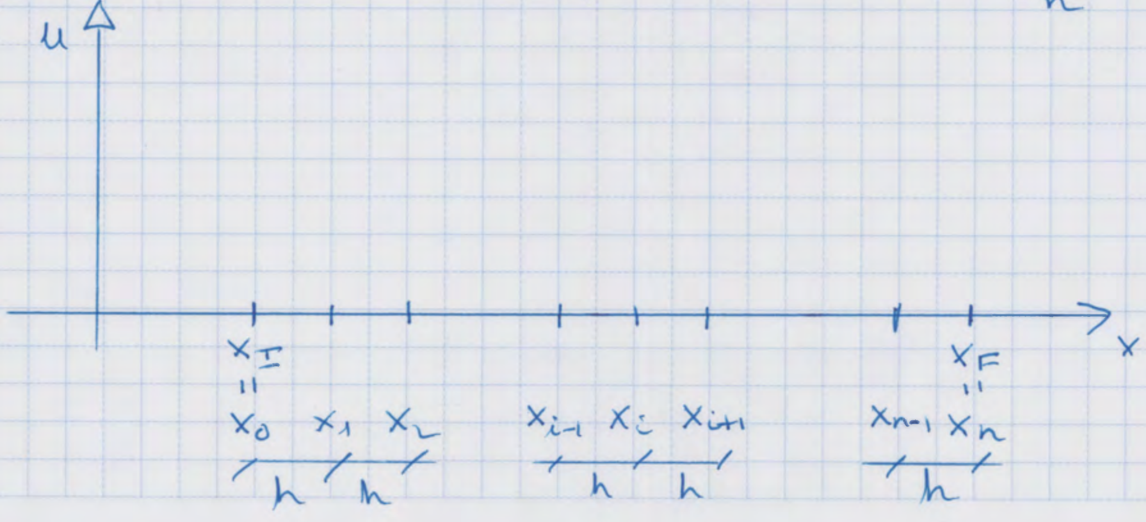
$$\begin{cases} x = x_I \rightarrow u(x_I) = u_I \\ x = x_F \rightarrow u(x_F) = u_F \end{cases}$$

2) Condiciones de contorno tipo MIXTO (NEUMAN – DIRICHLET):

$$\begin{cases} x = x_I \rightarrow u_x(x_I) = u'_I \\ x = x_F \rightarrow u_x(x_F) = u_F \end{cases}$$



Discretización: $\hat{u}_i \simeq u(x_i)$ $\qquad h = \dfrac{x_F - x_I}{n}$



Resolvemos el problema normalizado (con $\underbrace{b(x)=0}_{\text{sin fuentes}}$)

$$\underbrace{u_{xx}}_{\text{término difusivo}} - a \underbrace{u_x}_{\text{término convectivo}} = \varphi(x) \quad , \quad x \in (0,1) \quad \leftarrow \text{EDP}$$

$$a = v/\gamma \quad , \quad \varphi(x) = -\frac{b(x)}{\rho \gamma} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{array} \right\} \leftarrow \text{c.c. tipo Dirichlet.}$$

Solución analítica

$$u_{xx} - a u_x = 0 \iff (u_x - a u)_x = 0 \iff u_x - a u = c_1$$

$$\iff u_x = c_1 + a u \iff \frac{du}{c_1 + a u} = dx$$

$$\iff \ln(c_1 + a u) = a x + c_2$$

$$\iff c_1 + a u = e^{ax + c_2} \iff u = \frac{1}{a}\left(e^{ax+c_2} - c_1\right)$$

Luego $u(x) = \frac{1}{a}\left(e^{ax+c_2} - c_1\right)$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\left(e^{c_2} - c_1\right) = 0 \Rightarrow c_1 = e^{c_2} \\ u(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a}\left(e^{a+c_2} - c_1\right) = 1 \Rightarrow \frac{c_1}{a}\left(e^{a} - 1\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{c_2} = c_1 = \frac{a}{e^a - 1}$$

Por tanto, $\boxed{u(x) = \dfrac{e^{ax} - 1}{e^a - 1}}$

Solución numérica

$$\left[u_{xx} - a\,u_x\right]\Big|_{x=x_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-1$$

$$u_{xx}\Big|_{x=x_i} = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + \underbrace{\frac{-u_{xxxx}\Big|_{x=x_i} h^2}{12} + O(h^4)}_{O(h^2)}$$

$$u_x\Big|_{x=x_i} = \frac{-u(x_{i-1}) + u(x_{i+1})}{2h} + \underbrace{\frac{-u_{xxx}\Big|_{x=x_i} h^2}{6} + O(h^4)}_{O(h^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{a}{h}\right) u(x_{i-1}) + \left(\frac{-2}{h^2}\right) u(x_i) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{a}{h}\right) u(x_{i+1}) + \underbrace{\frac{-h^2}{12}\left(u_{xxxx}\Big|_{x=x_i} - 2a\,u_{xxx}\Big|_{x=x_i}\right) + O(h^4)}_{O(h^2)} = 0 \\ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{a}{h}\right) \hat{u}_{i-1} + \left(\frac{-2}{h^2}\right) \hat{u}_i + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{a}{h}\right) \hat{u}_{i+1} = 0 \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n-1$

c.c. $\begin{cases} u(0) = 0 \rightarrow \hat{u}_0 = 0 \\ u(1) = 1 \rightarrow \hat{u}_n = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ (1+ah) & -2 & (1-ah) & & & & \\ & (1+ah) & -2 & (1-ah) & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (1+ah) & -2 & (1-ah) & \\ & & & & (1+ah) & -2 & (1-ah) \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n-2} \\ \hat{u}_{n-1} \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} -2 & (1-ah) & & & \\ (1+ah) & -2 & (1-ah) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (1+ah) & -2 & (1-ah) \\ & & & (1+ah) & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n-2} \\ \hat{u}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(1-ah) \end{Bmatrix}}$$

Además: $\hat{u}_0 = 0$, $\hat{u}_n = 1$

Obsérvese que la matriz de coeficientes

<u>NO ES SIMÉTRICA</u>

y que la falta de simetría es mayor cuanto mayor es la velocidad convectiva $\left(a = \frac{v}{\gamma}\right)$.

El término convectivo $(-a u_x)$ desestabiliza la solución. La estabilización de esta ecuación es un problema muy importante. [Los métodos actuales estabilizan la ecuación agregando difusión, pero esto cambia el problema que se está resolviendo]

Nota:

El error local de truncamiento es

$$\tau_i(h^2) = \underbrace{-\frac{h^2}{12}\left(u_{xxxx}\Big|_{x=x_i} - 2a\, u_{xxx}\Big|_{x=x_i} \right)}_{O(h^2)} + O(h^4)$$

Pero $u_{xx} - a u_x = 0 \Rightarrow u_{xxxx} - a u_{xxx} = 0$

luego, $a u_{xxx} = u_{xxxx}$

y por tanto

$$\tau_i(h^2) = \frac{h^2}{12} u_{xxxx}\Big|_{x=x_i} + O(h^4)$$

también: $u_{xx} = a u_x \Rightarrow u_{xxx} = a u_{xx} \Rightarrow u_{xxxx} = a u_{xxx}$

luego $u_{xxxx} = a^3 u_x \Rightarrow$

$$\tau_i(h^2) = \underbrace{\frac{h^2}{12} a^3}\, u_x \Big|_{x=x_i} + O(h^4)$$

↓

En general la solución numérica será inexacta (pues $u_x \neq 0$) y el error local de truncamiento crecerá con a^3.