MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES: PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN

F. Navarrina & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS:

- ♣ **MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS** **(FDM)** (*)
- ♣ **MÉTODOS VARIACIONALES** (**)
  - ♣ **MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS** **(FEM)**
  - ♣ **MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS** **(FVM)**
  - ♣ **MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO** **(BEM)**
  - ♣ **ANÁLISIS ISOGEOMÉTRICO** **(IGA)**

(*) Las siglas provienen del inglés: **FDM** = **FINITE DIFFERENCE METHOD**

(**) Las siglas provienen del inglés: **FEM** = **FINITE ELEMENT METHOD**, **FVM** = **FINITE VOLUMEN METHOD**, **BEM** = **BOUNDARY ELEMENT METHOD**, **IGA** = **ISOGEOMETRIC ANALYSIS**

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (FDM)

Planteamiento: (*)

1) Se discretizan las variables independientes (coordenadas espaciales y tiempo)

2) Se plantean la **EDP**, las **CC** y las **CI** solamente en ciertos puntos e instantes (**)

3) Se sustituyen las expresiones diferenciales por expresiones algebraicas sobre la discretización.

4) Se desprecian los errores locales de truncamiento.

5) El sistema algebraico resultante se resuelve en un ordenador.

(*) Similar al de los métodos para EDOs basados en la aproximación de la derivada.

(**) Se procura que el número de ecuaciones que se obtengan al final sea igual al número de incógnitas.

Método de Diferencias Finitas (FDM) (IIa)

Formulación:

Sea un problema de contorno cuya solución continua (exacta) es

$$u(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{r} \in \Omega, \qquad t \geq t_o.$$

Se pretende calcular la solución sólo para los valores

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i, & i = 1, \ldots, M \\ t = t_n, & n = 1, \ldots, N \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \ \textbf{Discretización espacial} \quad \textbf{(*)} \\ \longleftarrow \ \textbf{Discretización temporal} \end{array}$$

Por tanto, el objetivo es obtener la solución discreta (exacta)

$$u(\boldsymbol{r}_i, t_n), \quad i = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N.$$

(*) Los puntos $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1,\ldots,M}$ se denominan **NODOS** y forman una **MALLA** espacial.

Método de Diferencias Finitas (FDM) (IIb)

Tras

– plantear la **EDP**, las **CC** y las **CI** solamente en ciertos puntos e instantes ($\boldsymbol{r}_j$, t_m),

– sustituir las expresiones diferenciales por expresiones algebraicas sobre la discretización ($\boldsymbol{r}_i$, t_n), y

– despreciar los errores locales de truncamiento $\tau_{j,m}$

se obtiene un sistema algebraico cuya solución es la aproximación a la solución discreta

$$\widehat{u}_{i,n} \approx u(\boldsymbol{r}_i, t_n), \quad i = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Al resolver el sistema algebraico en un ordenador digital se obtiene la solución numérica

$$u_{i,n} \approx \widehat{u}_{i,n} \approx u(\boldsymbol{r}_i, t_n), \quad i = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N.$$

que estará afectada de errores de redondeo.

Método de Diferencias Finitas (FDM) (IIc)

En estos términos, se definen los siguientes conceptos:

$$e_{i,n}^{T} = u(\boldsymbol{r}_i, t_n) - \widehat{u}_{i,n} \quad \longleftarrow$$ **error global de truncamiento**

$$e_{i,n}^{R} = \widehat{u}_{i,n} - u_{i,n} \quad \longleftarrow$$ **error global de redondeo**

Por tanto la solución discreta (exacta) podrá escribirse como

$$u(\boldsymbol{r}_i, t_n) = u_{i,n} + e_{i,n}^{T} + e_{i,n}^{R}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N.$$

También se definen los parámetros:

$h \quad \longleftarrow$ **indicador del nivel de discretización espacial** (*)

$\Delta t \quad \longleftarrow$ **indicador del nivel de discretización temporal** (**)

(*) Por ejemplo la mayor de las distancias entre nodos contiguos, de forma que $(h \to 0) \Rightarrow$ malla más fina.

(**) Normalmente la mayor de las diferencias de tiempo entre instantes consecutivos $\Delta t = \max\limits_{n=1,\ldots N-1} (t_{n+1} - t_n)$.

Consistencia, convergencia y estabilidad

CONSISTENCIA

Se dice que un método es **consistente** cuando el error local de truncamento tiende a 0 al refinar la discretización, esto es:

$$\lim_{h \to 0, \Delta t \to 0} \tau_{j,m} = 0 \quad \forall j \; \forall m$$

CONVERGENCIA

Se dice que un método es **convergente** cuando el error global de truncamento tiende a 0 al refinar la discretización, esto es:

$$\lim_{h \to 0, \Delta t \to 0} e_{i,n}^{T} = 0 \quad \forall i \; \forall n$$

ESTABILIDAD

Se dice que un método es **estable** cuando las perturbaciones en las condiciones iniciales se propagan de forma acotada en el tiempo.

MÉTODOS VARIACIONALES

Planteamiento:

1) Se aplica el principio de residuos ponderados.
El resultado es una **forma fuerte** equivalente al problema original. (*)

2) Se aplica el teorema de la divergencia para reducir el orden de derivación.
El resultado es una **forma débil** del problema original. (*)

3) Se sustituye la solución exacta por una combinación lineal de funciones adecuadamente elegidas. (**)

4) Se sustituyen las funciones de peso de los residuos por combinaciones lineales de funciones adecuadamente elegidas. (**)

5) El sistema de EDOs resultante se resuelve mediante un método numérico de integración en el tiempo.

(*) Los conceptos de forma fuerte y débil se estudiarán en Mecánica Computacional del MICCP.

(**) Se procura que el número de ecuaciones que se obtengan al final sea igual al número de incógnitas.

Formulación:

Sea un problema de contorno cuya solución continua (exacta) es

$$u(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{r} \in \Omega, \qquad t \geq t_o.$$

Mediante el **Principio de Residuos Ponderados** (*) el problema se reescribe en la forma

$$\mathbf{EDP}[u(\boldsymbol{r}, t)] = 0 \;\; \forall \boldsymbol{r} \in \Omega, \; \forall t$$

$$\Updownarrow$$

$$\iiint_{\boldsymbol{r} \in \Omega} \mathbf{EDP}[u(\boldsymbol{r}, t)] \, \omega(\boldsymbol{r}) \, d\Omega = 0 \;\; \forall \omega(\boldsymbol{r}).$$

El resultado es lo que se denomina una **FORMA FUERTE** equivalente al problema original.

(*) Ver apuntes de Fundamentos de Mecánica Computacional del GTECIC, Tema 4: Cálculo de Variaciones
<http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado_tecic/221/ApuntesYMaterialPedagogico/Apuntes/4_FormularioCV.pdf>

Mediante el **Teorema de la Divergencia**, (*)

$$\iiint_{\boldsymbol{r}\in\Omega} \mathrm{div}(\boldsymbol{f})\, d\Omega = \iint_{\boldsymbol{r}\in\partial\Omega} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\, d\Gamma$$

se reduce el orden de derivación espacial en algunos términos de la forma fuerte, pues

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

El resultado es lo que se denomina una **FORMA DÉBIL** del problema original. (*)

(*) Ver apuntes de Fundamentos de Mecánica Computacional del GTECIC, Tema 8: Teoría de Campos <http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado_tecic/221/ApuntesYMaterialPedagogico/Apuntes/8_FormularioTC.pdf>

(**) Admite posibles soluciones aproximadas con un orden de continuidad más bajo de lo normal.

Se busca una aproximación a la solución del tipo

$$u(\boldsymbol{r},t) \approx u^h(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r},t) + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i(t)\,\phi_i(\boldsymbol{r}).$$ $\longleftarrow$ **Funciones de Prueba** (*)

Se restringen las funciones $\omega(\boldsymbol{r})$ al tipo

$$\omega(\boldsymbol{r}) \approx \omega^h(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=0}^{\nu} \beta_j\,\omega_j(\boldsymbol{r}).$$ $\longleftarrow$ **Funciones de Test**

El resultado es un sistema de EDOs en el tiempo cuyas incógnitas son las funciones $\alpha_i(t)$.

(*) La función $\psi(\boldsymbol{r},t)$ se elige de forma adecuada para simplificar las condiciones de contorno.

Métodos Variacionales: FEM, BEM, FVM, IGA (III)

Variantes:

♣ **FEM – MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

– Las funciones de prueba y de test son **splines polinómicos**

♣ **FVM – MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS**

– Las funciones de prueba son **splines polinómicos**

– Las funciones de test son **constantes en subdominios**

♣ **BEM – MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO**

– Se aplica el **Teorema de la Divergencia** hasta que sólo queden integrales en el contorno. (*)

♣ **IGA – ANÁLISIS ISOGEOMÉTRICO**

– Las funciones de prueba y de test son **B-splines** o **T-splines**

(*) Luego el problema 3D se convierte en un problema 2D $\longrightarrow$ especialmente útil para problemas exteriores