MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES: CONCEPTOS GENERALES

F. Navarrina & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

- IVP/BVP frente a EDO/EDP
- EDPs lineales de 2.$^{\mathrm{o}}$ orden
- Problemas de contorno en Ingeniería
- Condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann y mixtas
- Condiciones Iniciales
- Prototipos de problemas en 1D

IVP/BVP frente a EDO/EDP (I)

Significado de las siglas

EDO = **E**cuación **D**iferencial **O**rdinaria (*)
ODE = **O**rdinary **D**ifferential **E**quation

EDP = **E**cuación en **D**erivadas **P**arciales (**)
PDE = **P**artial **D**ifferential **E**quation

PVI = **P**roblema de **V**alor **I**nicial
IVP = **I**nitial **V**alue **P**roblem

PVC = **P**roblema de **V**alor en el **C**ontorno
BVP = **B**oundary **V**alue **P**roblem

(*) La función incógnita depende de una sola variable ⇒ **DERIVADAS ORDINARIAS**
(**) La función incógnita depende de varias variables ⇒ **DERIVADAS PARCIALES**

IVP/BVP frente a EDO/EDP (II)

EDOs que son IVPs

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \varphi(x,u), & \forall x \in (0,1) \\ u = u_o, & \text{en } x = 0 \\ \dfrac{du}{dx} = v_o, & \text{en } x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

EDO con condiciones iniciales (*)

EDOs que NO son IVPs sino BVPs

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \varphi(x,u), & \forall x \in (0,1) \\ u = u_o, & \text{en } x = 0 \\ u = u_1, & \text{en } \underline{x = 1} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

EDO con condiciones de contorno (**)

(*) Se puede resolver directamente mediante los métodos desarrollados en el tema 3 (EDOs)

(**) Requiere planteamientos tipo **SHOOTING**, o métodos para **EDPs** $\longleftarrow$ **¡AUNQUE ES UNA EDO!**

IVP/BVP frente a EDO/EDP (III)

Luego, en realidad habría sido más correcto decir

Tema 3: Métodos para Problemas de Valor Inicial

Tema 4: Métodos para Problemas de Contorno (*)

. . . pero es más frecuente denominarlos como figuran en el programa

Tema 3: Métodos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tema 4: Métodos para Ecuaciones en Derivadas Parciales

(*) No se suele decir **Métodos para Problemas de Valores de Contorno**

EDPs lineales de 2.º orden (I)

Forma General

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + C\,u + D = 0, \quad \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \in \mathring{\Omega}$$

con condiciones **DE CONTORNO** en $\partial\Omega$.

Los coeficientes A_{ij}, B_i, C y D pueden ser $\begin{cases} \textbf{constantes} \\ \textbf{dependientes de } \boldsymbol{x} \end{cases}$

Clasificación

Dependiendo de los valores de los coeficientes $\{A_{ij}\}_{i,j=1,n}$ ...

$$\text{. . . la EDP será} \begin{cases} \textbf{1)}\ \textbf{ELÍPTICA} \\ \textbf{2)}\ \textbf{PARÁBOLICA} \\ \textbf{3)}\ \textbf{HIPERBÓLICA} \end{cases} \qquad (*)$$

(*) **Para averiguarlo hay que reducir la EDP a su forma canónica $\Rightarrow$ cambio de variable que elimine las derivadas cruzadas.**
Las diferencias entre estos tres tipos de EDPs son esenciales.
Es fundamental tener en cuenta estas diferencias al plantear cada problema y su solución numérica.
Si los coeficientes dependen de $\boldsymbol{x}$, la EDP será LOCALMENTE elíptica, parabólica o hiperbólica en cada punto.

Problemas de contorno en Ingeniería (I)

En Ingeniería se plantean tres tipos de EDPs de 2.$^{\text{o}}$ orden:

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\textbf{DE EQUILIBRIO} & \Longleftrightarrow \quad \Delta u = \varphi & \longrightarrow & \textbf{ELÍPTICOS} \\[2ex]
\textbf{TRANSITORIOS} & \Longleftrightarrow \quad \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varphi & \longrightarrow & \textbf{PARABÓLICOS} \\[2ex]
\textbf{DE ONDAS} & \Longleftrightarrow \quad \Delta u - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi & \longrightarrow & \textbf{HIPERBÓLICOS}
\end{array}
\right.
\qquad (*)
$$

donde la función incógnita es $u(x, y, z, t)$ (**)

y $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \varphi = \varphi(x, y, z, t).$

(*) Las expresiones de las EDPs se dan ya adimensionalizadas y escritas en forma canónica.

(**) Las funciones que describen los fenómenos que estudiamos dependen (con carácter general) del espacio y del tiempo.

Notas:

1) Los problemas **DE EQUILIBRIO** $\Longleftrightarrow$ **ELÍPTICOS** . . .

. . . **NO dependen del tiempo**. (*)

2) Los problemas **TRANSITORIOS** $\Longleftrightarrow$ **PARABÓLICOS** . . .

. . . **son problemas de evolución/difusión en el tiempo**.

3) Los problemas **DE ONDAS** $\Longleftrightarrow$ **HIPERBÓLICOS** . . .

. . . **son problemas de propagación en el tiempo**.

(*) Por este motivo también se llaman problemas **ESTACIONARIOS**.

Notas:

En general, nuestro objetivo será obtener $u(x, y, z, t)$

– en todos los puntos (x, y, z) de un dominio Ω, y

– en cada instante de tiempo t a partir de un determinado momento t_o.

Luego, para que el problema esté completo y bien definido habrá que plantear...

1) La EDP

– en los puntos $(x, y, z) \in \overset{\circ}{\Omega}$ (esto es: del interior de Ω), y

– en cada instante de tiempo $t > t_o$ (esto es: posterior al instante inicial).

2) Condiciones de contorno $\forall t > t_o$ en $\partial\Omega$ (el contorno de Ω).

3) Condiciones iniciales $\forall (x, y, z) \in \Omega$ en el instante t_o (el momento inicial).

Nota: Lógicamente, si el problemas es estacionario deben omitirse todas las referencias al tiempo en esta discusión.

Condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann y mixtas

Tipos de condiciones de contorno

Sea $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ el punto de coordenadas (x, y, z) donde la normal al contorno es $\boldsymbol{n}$.

En cada $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ y para todo $t > t_o$ se debe imponer una de las siguientes condiciones de contorno:

1) Tipo **DIRICHLET** $\longrightarrow$ $\boxed{u = f(\boldsymbol{x}, t)}$ (*)

2) Tipo **NEUMANN** $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial n} = g(\boldsymbol{x}, t)}$ (**)

3) Tipo **ROBIN** $\longrightarrow$ $\boxed{\alpha\, u + \beta\, \dfrac{\partial u}{\partial n} = h(\boldsymbol{x}, t)}$ (***)

Se dice que son de tipo mixto cuando se imponen distintos tipos en distintas partes del contorno.

(*) En ese punto del contorno se impone el valor en cada instante.

(**) En ese punto del contorno se impone el valor de la derivada espacial según la normal en cada instante.

(***) Esta condición es una combinación lineal de las dos anteriores.

Condiciones Iniciales

Tipos de condiciones iniciales

Sea $\boldsymbol{x} \in \Omega$ el punto de coordenadas (x, y, z), y sea t_{o} el momento inicial.

En $t = t_{\mathrm{o}}$ y para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega$ se deben imponer las siguientes condiciones iniciales:

1) En problemas **PARABÓLICOS**:

$$\boxed{u = u_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{x})} \qquad (*)$$

2) En problemas **HIPERBÓLICOS**:

$$\boxed{u = u_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{x})} \qquad (*)$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_{\mathrm{o}}} = v_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{x})} \qquad (**)$$

(*) Se impone el valor inicial en cada punto del dominio.

(**) Se impone el valor inicial de la derivada temporal en cada punto del dominio.

Problemas ELÍPTICOS:

EDP: $u_{xx} = \varphi(x), \quad x \in (a, b)$

CC: $u(a) = f_a, \quad u(b) = f_b \longleftarrow$ tipo Dirichlet

EDP: $u_{xx} = \varphi(x), \quad x \in (a, b)$

CC: $u_x(a) = g_a, \quad u(b) = f_b \longleftarrow$ tipo Mixto

EDP: $u_{xx} = \varphi(x), \quad x \in (a, b)$

CC: $u(a) = f_a, \quad u_x(b) = g_b \longleftarrow$ tipo Mixto

Nota: No se pueden imponer dos condiciones de contorno de tipo Neumann.
Probablemente serán incompatibles, y en cualquier caso la solución estará indeterminada.

Prototipos de problemas en 1D (II)

Problemas PARABÓLICOS:

EDP: $u_{xx} - u_t = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \qquad x \in [a,b]$

CC: $u(a,t) = f_a(t), \quad u(b,t) = f_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Dirichlet

EDP: $u_{xx} - u_t = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \qquad x \in [a,b]$

CC: $u_x(a,t) = g_a(t), \quad u(b,t) = f_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Mixto

EDP: $u_{xx} - u_t = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \qquad x \in [a,b]$

CC: $u(a,t) = f_a(t), \quad u_x(b,t) = g_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Mixto

---

Nota: No se pueden imponer dos condiciones de contorno de tipo Neumann.
Probablemente serán incompatibles, y en cualquier caso la solución estará indeterminada.

Problemas HIPERBÓLICOS:

EDP: $u_{xx} - u_{tt} = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \quad u_t(x,t_o) = v_o(x) \quad x \in [a,b]$

CC: $u(a,t) = f_a(t), \quad u(b,t) = f_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Dirichlet

EDP: $u_{xx} - u_{tt} = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \quad u_t(x,t_o) = v_o(x) \quad x \in [a,b]$

CC: $u_x(a,t) = g_a(t), \quad u(b,t) = f_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Mixto

EDP: $u_{xx} - u_{tt} = \varphi(x,t), \qquad x \in (a,b), \quad t > t_o$

CI: $u(x,t_o) = u_o(x), \quad u_t(x,t_o) = v_o(x) \quad x \in [a,b]$

CC: $u(a,t) = f_a(t), \quad u_x(b,t) = g_b(t) \qquad t > t_o \longleftarrow$ tipo Mixto

Nota: No se pueden imponer dos condiciones de contorno de tipo Neumann.
Probablemente serán incompatibles, y en cualquier caso la solución estará indeterminada.

REFLEXIÓN:

¿Es posible confundir una ecuación hiperbólica 1D con una elíptica 2D?

RESPUESTA:

El prototipo de ecuación hiperbólica 1D es

$$u_{xx} - u_{tt} = \varphi(x, t)$$

El prototipo de ecuación elíptica 2D es

$$u_{xx} + u_{yy} = \varphi(x, y)$$

La derivada segunda temporal tiene el signo cambiado $\longleftarrow$ **NO HAY CONFUSIÓN.**