UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre:*

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

¿Converge la cuadratura simple cuando $n \to \infty$?

Sea la cuadratura $\{(x_i^n, w_i^n)\}_{i=0,\dots,n}$ tal que

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n w_i^n f(x_i^n) + E_n \\ \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^n w_i^n p_n(x_i^n) \qquad \forall p_n(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x) - p_n(x))\,dx = \sum_{i=0}^n w_i^n (f(x_i^n) - p_n(x_i^n)) + E_n$$

$$E_n = \int_a^b (f(x) - p_n(x))\,dx - \sum_{i=0}^n w_i^n (f(x_i^n) - p_n(x_i^n))$$

$$|E_n| \le \left| \int_a^b (f(x) - p_n(x))\,dx \right| + \sum_{i=0}^n |w_i^n (f(x_i^n) - p_n(x_i^n))|$$

$$\le \int_a^b |f(x) - p_n(x)|\,dx + \sum_{i=0}^n |w_i^n|\,|f(x_i^n) - p_n(x_i^n)| \qquad \forall p_n(x)$$

T. Weierstrass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n, \hat{p}_n(x) \ / \ |f(x) - \hat{p}_n(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

Luego $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ /$

$$|E_n| \le \int_a^b |f(x) - \hat{p}_n(x)|\,dx + \sum_{i=0}^n |w_i^n|\,|f(x_i^n) - \hat{p}_n(x_i^n)|$$

$$\le \int_a^b \varepsilon\,dx + \sum_{i=0}^n |w_i^n|\,\varepsilon$$

$$= \varepsilon \left[(b-a) + \sum_{i=0}^n |w_i^n| \right]$$

Si $w_i^n \ge 0 \ \forall i,n \Rightarrow \sum_{i=0}^n |w_i^n| = \sum_{i=0}^n w_i^n = \int_a^b 1\,dx = (b-a)$

$$\Rightarrow \exists n \ / \ |E_n| \le 2\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Gauss: pesos positivos} \Rightarrow \text{Convergencia asegurada} \\ \text{N-C: pesos + y −} \Rightarrow \text{" no asegurada} \end{cases}$$