Ejemplo de aplicación de integral multidimensional

Calcular la inercia con respecto al eje X de una sección definida por la curva $y = \sqrt{x}$ entre 0 y 1.

$$I_x = \int_\Omega y^2 \, dA = \frac{2}{15} \approx 0{,}1333333333333333$$

La integral la podemos resolver integrando primero en x y luego en y o al revés.

$$I_x = \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y^2 \, dy \right] dx = \int_{y=0}^{y=1} \left[\int_{x=y^2}^{x=1} y^2 \, dx \right] dy$$

Numéricamente también procederemos de forma análoga integrando primero en una variable y luego en la otra.

Opción 1

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \underbrace{\left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y^2 \, dy \right]}_{g(x)} dx$$

De modo que:

$$I = \int_{x=0}^{x=1} g(x) \, dx \qquad \text{con} \qquad g(x) = \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y^2 \, dy$$

Resolvemos en primer lugar la integral 1D en x. Dado que es una integral con límites de integración definidos y la función integrando no presenta asíntotas verticales planteamos una cuadratura de Gauss-Legendre. Utilizaremos 3 puntos de integración en el eje x y 2 puntos de integración en el eje y.

$$I = \int_{x=0}^{x=1} g(x) \, dx \approx \sum_{i=0}^{2} w_i^x g(x_i)$$

El intervalo de integración en x va desde 0 a 1. Transformamos el intervalo de integración en el intervalo normalizado como:

$$x = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}$$

$$J_x = \frac{1}{2}$$

La ubicación en x de los puntos de integración sería:

$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & -0{,}77459666924148 \rightarrow x_0 = 0{,}11270166537926 \\ z_1 & = & +0{,}00000000000000 \rightarrow x_1 = 0{,}50000000000000 \\ z_2 & = & +0{,}77459666924148 \rightarrow x_2 = 0{,}88729833462074 \end{array}$$

$$I \approx \sum_{i=0}^{2} \underbrace{w_i^x J_x}_{W_i^x} g(x_i)$$

Integramos ahora en la otra dimensión:

$$g(x_i) = \int_{y=0}^{y=\sqrt{x_i}} y^2 \, dy; \qquad i = 0, 2$$

Normalizamos el intervalo de integración como:

$$y = \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x_i}$$

$$J_{i,y} = \frac{\sqrt{x_i}}{2}$$

$$g(x_i) = \int_{y=0}^{y=\sqrt{x_i}} y^2 \, dy \approx \sum_{j=0}^{1} \underbrace{w_{ij}^y J_{i,y}}_{W_{ij}^y} y_{ij}^2$$

De modo que:

$$I \approx \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} W_{ij}^y W_i^x y_{ij}^2$$

Los puntos y pesos de integración serían:

	x_i	y_{ij}
$(0,0)$	0,11270166537926	0,0709440157495269
$(0,1)$	0,11270166537926	0,2647666712702040
$(1,0)$	0,50000000000000	0,1494292453613410
$(1,1)$	0,50000000000000	0,5576775358252070
$(2,0)$	0,88729833462074	0,1990606575088370
$(2,1)$	0,88729833462074	0,7429044876110550

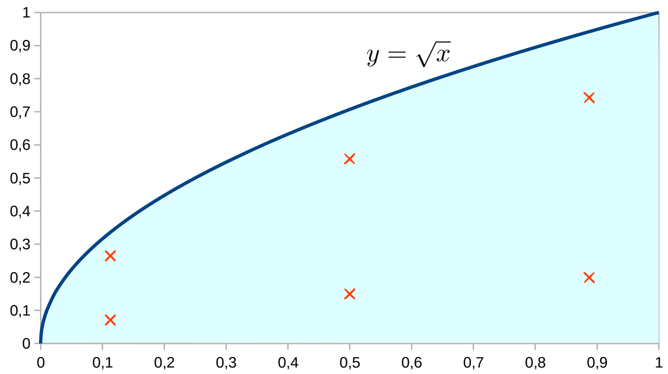

Figura 2.8: Integración múltiple integrando primero en x y luego en y.

	W_i^x	W_{ij}^y	$W_i^x W_{ij}^y$
$(0,0)$	0,277777777777778	0,167855343509866	0,0466264843082961
$(0,1)$	0,277777777777778	0,167855343509866	0,0466264843082961
$(1,0)$	0,444444444444444	0,353553390593274	0,157134840263677
$(1,1)$	0,444444444444444	0,353553390593274	0,157134840263677
$(2,0)$	0,277777777777778	0,470982572559946	0,130828492377763
$(2,1)$	0,277777777777778	0,470982572559946	0,130828492377763

De modo que:

$$I \approx 0{,}133270803981264 \quad \rightarrow \quad r \approx 0{,}468970140519928\, 10^{-3}$$

Opción 2

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \Bigg[\underbrace{\int_{x=y^2}^{x=1} y^2\, dx}_{h(y)} \Bigg]\, dy$$

De modo que:

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^{y=1} h(y)\, dy \\ h(y) &= \int_{x=y^2}^{x=1} y^2\, dx \end{aligned}$$

Resolvemos en primer lugar la integral 1D en y. Utilizamos la misma cuadratura y los mismos puntos de integración.

$$I = \int_{y=0}^{y=1} h(y)\, dy \approx \sum_{j=0}^{1} w_j^y h(y_j)$$

El intervalo de integración en y va desde 0 a 1. Transformamos el intervalo de integración en el intervalo normalizado como:

$$y = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}$$

$$J_y = \frac{1}{2}$$

La ubicación en y de los puntos de integración sería:

$$\begin{aligned} z_0 &= -0{,}57735026918963 \rightarrow y_0 = 0{,}211324865405185 \\ z_1 &= +0{,}57735026918963 \rightarrow y_1 = 0{,}788675134594815 \end{aligned}$$

$$I \approx \sum_{j=0}^{1} \underbrace{w_j^y J_y}_{W_j^y} h(y_j)$$

Integramos ahora en la otra dimensión:

$$h(y_j) = \int_{x=y_j^2}^{x=1} y_j^2\, dx; \qquad j = 0, 1$$

Normalizamos el intervalo de integración como:

$$x = \left(\frac{1 - y_j^2}{2} z + \frac{1 + y_j^2}{2} \right)$$

$$J_{j,x} = \frac{1 - y_j^2}{2}$$

$$h(y_j) = \int_{x=y^2}^{x=1} y^2 \, dx \approx \sum_{i=0}^{2} \underbrace{w_{ij}^x J_{j,x}}_{W_{ij}^x} y_j^2$$

De modo que:

$$I \approx \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} W_{ij}^x W_j^y y_j^2$$

Los puntos y pesos de integración serían:

	x_{ij}	y_j
$(0,0)$	0,152326810747110	0,211324865405185
$(1,0)$	0,522329099369260	0,211324865405185
$(2,0)$	0,892331387991409	0,211324865405185
$(0,1)$	0,664608743091906	0,788675134594815
$(1,1)$	0,811004233964075	0,788675134594815
$(2,1)$	0,957399724836245	0,788675134594815

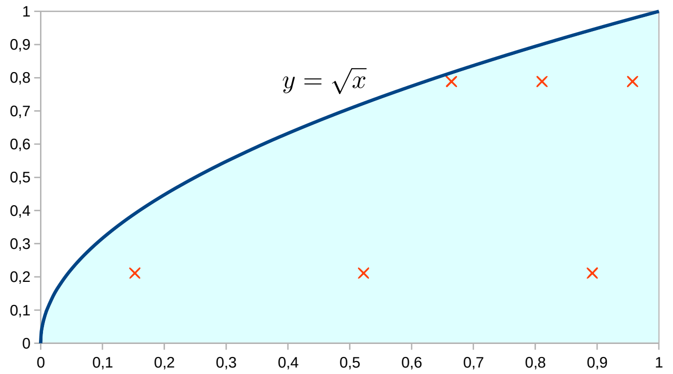

Figura 2.9: Integración múltiple integrando primero en y y luego en x.

	W_{ij}^x	W_j^y	$W_j^y W_{ij}^x$
$(0,0)$	0,265372722572634	0,500000000000000	0,132686361286317
$(1,0)$	0,424596356116214	0,500000000000000	0,212298178058107
$(2,0)$	0,265372722572634	0,500000000000000	0,132686361286317
$(0,1)$	0,104997647797736	0,500000000000000	0,052498823898868
$(1,1)$	0,167996236476378	0,500000000000000	0,083998118238189
$(2,1)$	0,104997647797736	0,500000000000000	0,052498823898868

De modo que:

$$I \approx 0{,}1388888888888888 \quad \rightarrow \quad r \approx 0{,}4166666666666\, 10^{-1}$$

En este segundo caso si utilizásemos 3 puntos de integración para y la integral sería exacta. La ubicación en y de los puntos de integración sería:

$$\begin{array}{rclcrcl} z_0 & = & -0{,}77459666924148 & \to & y_0 & = & 0{,}112701665379260 \\ z_1 & = & +0{,}00000000000000 & \to & y_1 & = & 0{,}500000000000000 \\ z_2 & = & +0{,}77459666924148 & \to & y_1 & = & 0{,}887298334620740 \end{array}$$

$$I \approx \sum_{j=0}^{2} \underbrace{w_j^y J_y}_{W_j^y} h(y_j)$$

Integramos ahora en la otra dimensión:

$$h(y_j) = \int_{x=y_j^2}^{x=1} y_j^2 \, dx; \qquad j = 0, 2$$

Normalizamos el intervalo de integración como:

$$x = \left(\frac{1 - y_j^2}{2} z + \frac{1 + y_j^2}{2} \right)$$

$$J_{j,x} = \frac{1 - y_j^2}{2}$$

$$h(y_j) = \int_{x=y^2}^{x=1} y^2 \, dx \approx \sum_{i=0}^{2} \underbrace{w_{ij}^x J_{j,x}}_{W_{ij}^x} y_j^2$$

De modo que:

$$I \approx \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} W_{ij}^x W_j^y y_j^2$$

Los puntos y pesos de integración serían:

	x_{ij}	y_j
$(0,0)$	0,123971831917186	0,112701665379260
$(1,0)$	0,506350832689629	0,112701665379260
$(2,0)$	0,888729833462073	0,112701665379260
$(0,1)$	0,334526249034445	0,500000000000000
$(1,1)$	0,625000000000000	0,500000000000000
$(2,1)$	0,915473750965555	0,500000000000000
$(0,2)$	0,811270166537924	0,887298334620740
$(1,2)$	0,893649167310369	0,887298334620740
$(2,2)$	0,976028168082815	0,887298334620740

	W_{ij}^x	W_j^y	$W_j^y W_{ij}^x$
$(0,0)$	0,274249537394650	0,277777777777778	0,0761804270540680
$(1,0)$	0,438799259831441	0,277777777777778	0,121888683286510
$(2,0)$	0,274249537394650	0,277777777777778	0,0761804270540680
$(0,1)$	0,208333333333333	0,444444444444444	0,0925925925925917
$(1,1)$	0,333333333333333	0,444444444444444	0,148148148148148
$(2,1)$	0,208333333333333	0,444444444444444	0,0925925925925917
$(0,2)$	0,0590837959386837	0,277777777777778	0,0164121655385229
$(1,2)$	0,0945340735018939	0,277777777777778	0,0262594648616369
$(2,2)$	0,0590837959386837	0,277777777777778	0,0164121655385229

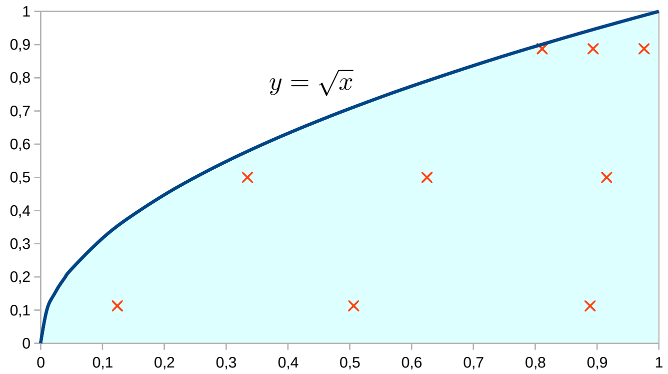

Figura 2.10: Integración múltiple integrando primero en y y luego en x (3 puntos en cada dirección).

De modo que:

$$I \approx 0{,}13333333333333 \quad \to \quad r = 0$$

Ejemplo propuesto

Calcular el volumen de un toroide de sección elíptica obtenido al girar alrededor del eje x la elipse:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

Y la integral en el dominio queda como:

$$V = 2 \int_{\Omega} 2\,\pi\, y\, dx\, dy$$

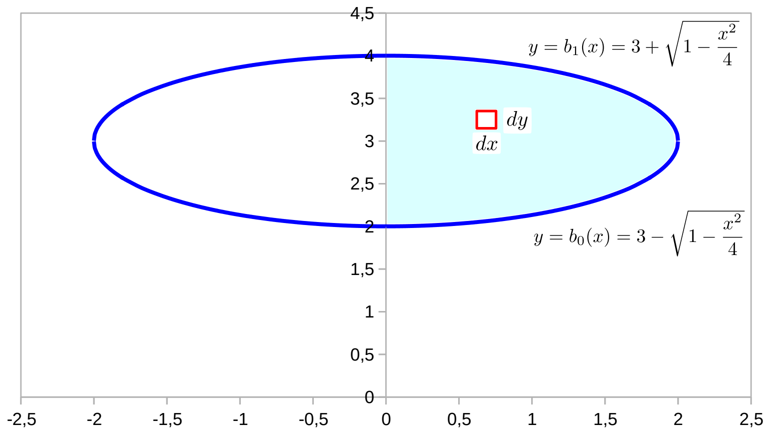

Figura 2.11: Dominio de integración Ω del ejemplo propuesto.