1. B-splines

Sean un conjunto de $n+1$ puntos base de interpolación $P_0, \ldots, P_n$ que utilizamos para crear un spline polinómico de orden p y con orden de continuidad $p-1$ entre tramos de spline. Para definir este spline se crea un vector de knots (tramos de polinomios definidos a trozos en los que se divide el B-spline). El vector de knots estará definido como $T = [\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m]$ donde $m = n+p+1$, de modo que el vector de knots tendrá $m+1$ componentes.

El B-spline de interpolación se obtendrá como:

$$B(\xi) = \sum_{i=0}^{n} P_i \; N_{i,p}(\xi), \qquad \xi \in [0,1] \tag{1}$$

Las componentes del vector de knots adoptan valores en el intervalo $[0,1]$ y satisfacen que:

$$\begin{array}{lll} \xi_i \leq \xi_{i+1}, & i = 0, \ldots, m & \text{(Secuencia no decreciente)} \\ [\xi_i, \xi_{i+1}] & \rightarrow & \text{knot span} \end{array} \tag{2}$$

Los knots ξ_{p+1} a ξ_{m-p-1} son denominados nodos internos. Si los nodos internos están repartidos uniformemente se dice que el B-spline es uniforme. Para que el B-spline sea interpolador en los puntos extremos (P_0 y P_n) es necesario que los primeros $p+1$ knots valgan 0 y que los últimos $p+1$ knots valgan 1. En este caso se dice que el B-spline es abierto y uniforme.

Si alguno de los knots internos se repite se reduce el orden de continuidad de la curva tantos órdenes de continuidad como veces se repita ese knot.

Las funciones base de B-splines se pueden obtener de forma recursiva a partir de la base de polinomios de orden 0:

$$N_{i,0}(\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \quad \text{y} \quad \xi_i < \xi_i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \qquad i = 0, m-1 \tag{3}$$

como:

$$N_{i,q}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+q} - \xi_i} \; N_{i,q-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+q+1} - \xi}{\xi_{i+q+1} - \xi_{i+1}} \; N_{i+1,q-1}(\xi) \qquad \left\{ \begin{array}{l} q = 1, \ldots, p \\ i = 0, \ldots, n+p-q \end{array} \right. \tag{4}$$

En el caso de que se produzcan indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ se asumirá que son nulas.

Ejemplo de aplicación: B-spline abierto y uniforme de orden $p = 2$ y orden de continuidad $\mathcal{C}^1$. Disponemos de 6 puntos base $\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\}$, de modo que $n = 5$. En este caso, $m = n+p+1 = 8$ de modo que el vector de knots quedaría como:

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 & \xi_8 \\ T = & [& 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}75 & 1 & 1 & 1 &] \end{array} \tag{5}$$

La base de funciones de forma de orden 0 quedaría como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,0} &= 0 \\
N_{1,0} &= 0 \\
N_{2,0} &= \begin{cases} 1 & 0 < \xi < 0{,}25 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{3,0} &= \begin{cases} 1 & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{4,0} &= \begin{cases} 1 & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{5,0} &= \begin{cases} 1 & 0{,}75 < \xi < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{6,0} &= 0 \\
N_{7,0} &= 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Las funciones base de primer orden se obtendrían como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,1} &= \frac{\xi - 0}{0 - 0}\,\cancel{N_{0,0}(\xi)} + \frac{0 - \xi}{0 - 0}\,\cancel{N_{1,0}(\xi)} &&= 0 \\
N_{1,1} &= \frac{\xi - 0}{0 - 0}\,\cancel{N_{1,0}(\xi)} + \frac{0{,}25 - \xi}{0{,}25 - 0}\,N_{2,0}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{0{,}25 - \xi}{0{,}25} & 0 < \xi < 0{,}25 \end{cases} \\
N_{2,1} &= \frac{\xi - 0}{0{,}25 - 0}\,N_{2,0}(\xi) + \frac{0{,}5 - \xi}{0{,}5 - 0{,}25}\,N_{3,0}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi}{0{,}25} & 0 < \xi < 0{,}25 \\ \dfrac{0{,}5 - \xi}{0{,}5 - 0{,}25} & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \end{cases} \\
N_{3,1} &= \frac{\xi - 0{,}25}{0{,}5 - 0{,}25}\,N_{3,0}(\xi) + \frac{0{,}75 - \xi}{0{,}75 - 0{,}5}\,N_{4,0}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi - 0{,}25}{0{,}25} & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \\ \dfrac{0{,}75 - \xi}{0{,}75 - 0{,}5} & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \end{cases} \\
N_{4,1} &= \frac{\xi - 0{,}5}{0{,}75 - 0{,}5}\,N_{4,0}(\xi) + \frac{1 - \xi}{1 - 0{,}75}\,N_{5,0}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi - 0{,}5}{0{,}25} & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \\ \dfrac{1 - \xi}{1 - 0{,}75} & 0{,}75 < \xi < 1 \end{cases} \\
N_{5,1} &= \frac{\xi - 0{,}75}{1 - 0{,}75}\,N_{5,0}(\xi) + \frac{1 - \xi}{1 - 1}\,\cancel{N_{6,0}(\xi)} &&= \begin{cases} \dfrac{\xi - 0{,}75}{0{,}25} & 0{,}75 < \xi < 1 \end{cases} \\
N_{6,1} &= \frac{\xi - 1}{1 - 1}\,\cancel{N_{6,0}(\xi)} + \frac{1 - \xi}{1 - 1}\,\cancel{N_{7,0}(\xi)} &&= 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Y las funciones base de segundo orden (que serían las utilizadas para definir el B-spline) se obtendrían como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,2} &= \frac{\xi-0}{0-0}\,\cancel{N_{0,1}(\xi)} + \frac{0{,}25-\xi}{0{,}25-0}\,N_{1,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{0{,}25-\xi}{0{,}25}\dfrac{0{,}25-\xi}{0{,}25} & 0<\xi<0{,}25 \end{cases} \\
N_{1,2} &= \frac{\xi-0}{0{,}25}\,N_{1,1}(\xi) + \frac{0{,}5-\xi}{0{,}5-0{,}25}\,N_{2,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi(0{,}25-\xi)}{0{,}25^2} + \dfrac{(0{,}5-\xi)\xi}{0{,}125} & 0<\xi<0{,}25 \\ \dfrac{(0{,}5-\xi)^2}{0{,}125} & 0{,}25<\xi<0{,}5 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{\xi-0}{0{,}5}\,N_{2,1}(\xi) + \frac{0{,}75-\xi}{0{,}75-0{,}25}\,N_{3,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{0{,}125} & 0<\xi<0{,}25 \\ \dfrac{\xi(0{,}5-\xi)+(0{,}75-\xi)(\xi-0{,}25)}{0{,}125} & 0{,}25<\xi<0{,}5 \\ \dfrac{(0{,}75-\xi)^2}{0{,}125} & 0{,}5<\xi<0{,}75 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \frac{\xi-0{,}25}{0{,}5}\,N_{3,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-0{,}5}\,N_{4,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-0{,}25)^2}{0{,}125} & 0{,}25<\xi<0{,}5 \\ \dfrac{(\xi-0{,}25)(0{,}75-\xi)+(1-\xi)(\xi-0{,}5)}{0{,}125} & 0{,}5<\xi<0{,}75 \\ \dfrac{(1-\xi)^2}{0{,}125} & 0{,}75<\xi<1 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \frac{\xi-0{,}5}{0{,}5}\,N_{4,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-0{,}75}\,N_{5,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-0{,}5)^2}{0{,}125} & 0{,}5<\xi<0{,}75 \\ \dfrac{(\xi-0{,}5)(1-\xi)}{0{,}125} + \dfrac{(1-\xi)(\xi-0{,}75)}{0{,}25^2} & 0{,}75<\xi<1 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \frac{\xi-0{,}75}{0{,}25}\,N_{5,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-1}\,\cancel{N_{6,1}(\xi)} &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-0{,}75)^2}{0{,}25^2} & 0{,}75<\xi<1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Que operando quedan como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,2} &= \begin{cases} \dfrac{0{,}0625 - 0{,}5\xi + \xi^2}{0{,}0625} & 0 < \xi < 0{,}25 \end{cases} \\
N_{1,2} &= \begin{cases} \dfrac{\xi - 3\xi^2}{0{,}125} & 0 < \xi < 0{,}25 \\ \dfrac{0{,}25 - \xi + \xi^2}{0{,}125} & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{0{,}125} & 0 < \xi < 0{,}25 \\ \dfrac{-0{,}1875 + 1{,}5\xi - 2\xi^2}{0{,}125} & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \\ \dfrac{0{,}5625 - 1{,}5\xi + \xi^2}{0{,}125} & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \begin{cases} \dfrac{0{,}0625 - 0{,}5\xi + \xi^2}{0{,}125} & 0{,}25 < \xi < 0{,}5 \\ \dfrac{-0{,}6875 + 2{,}5\xi - 2\xi^2}{0{,}125} & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \\ \dfrac{1 - 2\xi + \xi^2}{0{,}125} & 0{,}75 < \xi < 1 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \begin{cases} \dfrac{0{,}25 - \xi + \xi^2}{0{,}125} & 0{,}5 < \xi < 0{,}75 \\ \dfrac{-2 + 5\xi - 3\xi^2}{0{,}125} & 0{,}75 < \xi < 1 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \begin{cases} \dfrac{0{,}5625 - 1{,}5\xi + \xi^2}{0{,}0625} & 0{,}75 < \xi < 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}
$$

De modo que para unas coordenadas de puntos base:

i	x_i	y_i
0	1,0	0,2
1	2,2	1,5
2	4,0	0,8
3	4,9	1,9
4	6,9	1,5
5	8,0	0,5

(10)

El B-spline quedaría como se puede apreciar en la figura 2.

Si ahora repetimos uno de los knots dentro del “knot vector” se reduce en una unidad el orden de continuidad del B-spline en ese punto. Así, el vector de knots quedaría como:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 & \xi_8 \\
T = [& 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 1 & 1 & 1 \quad]
\end{array} \tag{11}
$$

Y las bases de B-splines quedarían como:

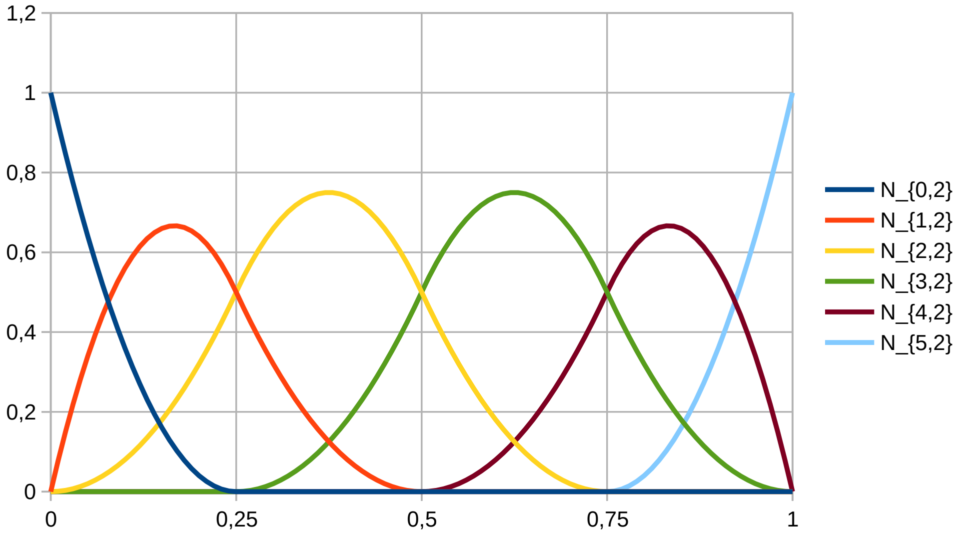

Figura 1: Bases de B-splines de orden 2.

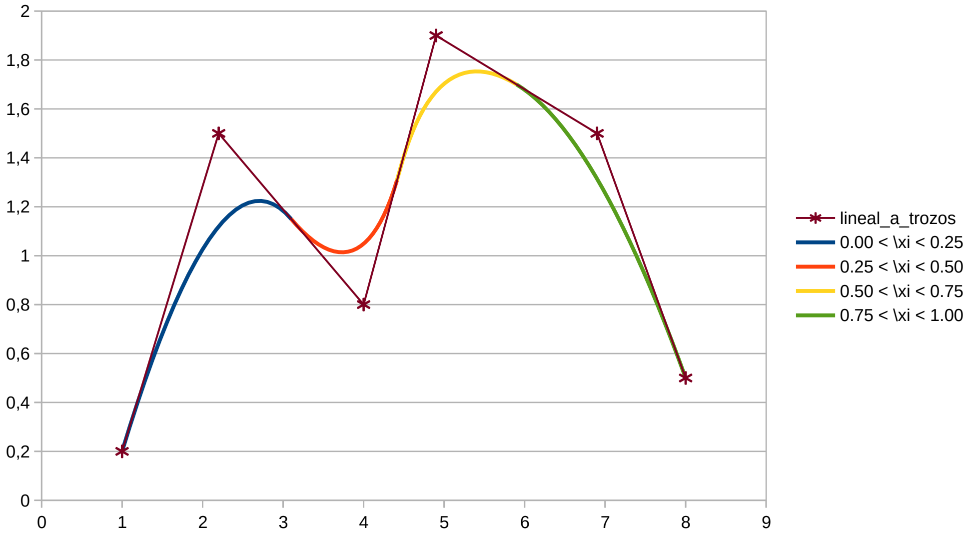

Figura 2: Interpolación mediante B-spline abierto y uniforme de orden 2.

$$
\begin{aligned}
N_{0,0} &= 0 \\
N_{1,0} &= 0 \\
N_{2,0} &= \begin{cases} 1 & 0 < \xi < 1/3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{3,0} &= 0 \\
N_{4,0} &= \begin{cases} 1 & 1/3 < \xi < 2/3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{5,0} &= \begin{cases} 1 & 2/3 < \xi < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
N_{6,0} &= 0 \\
N_{7,0} &= 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Las funciones base de primer orden se obtendrían como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,1} &= \frac{\xi-0}{0-0}\,\cancel{N_{0,0}(\xi)}+\frac{0-\xi}{0-0}\,\cancel{N_{1,0}(\xi)} &&= 0\\
N_{1,1} &= \frac{\xi-0}{0-0}\,\cancel{N_{1,0}(\xi)}+\frac{1/3-\xi}{1/3-0}\,N_{2,0}(\xi) &&= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1/3-\xi}{1/3} & 0<\xi<1/3 \end{array}\right.\\
N_{2,1} &= \frac{\xi-0}{1/3-0}\,N_{2,0}(\xi)+\frac{1/3-\xi}{1/3-1/3}\,\cancel{N_{3,0}(\xi)} &&= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\xi}{1/3} & 0<\xi<1/3 \end{array}\right.\\
N_{3,1} &= \frac{\xi-1/3}{1/3-1/3}\,\cancel{N_{3,0}(\xi)}+\frac{2/3-\xi}{1/3}\,N_{4,0}(\xi) &&= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2/3-\xi}{1/3} & 1/3<\xi<2/3 \end{array}\right.\\
N_{4,1} &= \frac{\xi-1/3}{2/3-1/3}\,N_{4,0}(\xi)+\frac{1-\xi}{1-2/3}\,N_{5,0}(\xi) &&= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\xi-1/3}{1/3} & 1/3<\xi<2/3 \\ \dfrac{1-\xi}{1/3} & 2/3<\xi<1 \end{array}\right.\\
N_{5,1} &= \frac{\xi-2/3}{1-2/3}\,N_{5,0}(\xi)+\frac{1-\xi}{1-1}\,\cancel{N_{6,0}(\xi)} &&= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\xi-2/3}{1/3} & 2/3<\xi<1 \end{array}\right.\\
N_{6,1} &= \frac{\xi-1}{1-1}\,\cancel{N_{6,0}(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-1}\,\cancel{N_{7,0}(\xi)} &&= 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Y las funciones base de segundo orden (que serían las utilizadas para definir el B-spline) se obtendrían como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,2} &= \frac{\xi-0}{0-0}\,\cancel{N_{0,1}(\xi)} + \frac{1/3-\xi}{1/3-0}\,N_{1,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{1/3-\xi}{1/3}\dfrac{1/3-\xi}{1/3} & 0<\xi<1/3 \end{cases} \\
N_{1,2} &= \frac{\xi-0}{1/3}\,N_{1,1}(\xi) + \frac{1/3-\xi}{1/3-0}\,N_{2,1}(\xi) &&= \begin{cases} 2\,\dfrac{\xi(1/3-\xi)}{(1/3)^2} & 0<\xi<1/3 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{\xi-0}{1/3}\,N_{2,1}(\xi) + \frac{2/3-\xi}{2/3-1/3}\,N_{3,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{(1/3)^2} & 0<\xi<1/3 \\ \dfrac{(2/3-\xi)^2}{(1/3)^2} & 1/3<\xi<2/3 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \frac{\xi-1/3}{1/3}\,N_{3,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-1/3}\,N_{4,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-1/3)(2/3-\xi+(1-\xi)/2)}{(1/3)^2} & 1/3<\xi<2/3 \\ \dfrac{(1-\xi)^2}{2(1/3)^2} & 2/3<\xi<1 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \frac{\xi-1/3}{1/1/3}\,N_{4,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-2/3}\,N_{5,1}(\xi) &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-1/3)^2}{2\,(1/3)^2} & 1/3<\xi<2/3 \\ \dfrac{(1-\xi)((\xi-2/3)+(\xi-1/3)/2)}{(1/3)^2} & 2/3<\xi<1 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \frac{\xi-2/3}{1-2/3}\,N_{5,1}(\xi) + \frac{1-\xi}{1-1}\,\cancel{N_{6,1}(\xi)} &&= \begin{cases} \dfrac{(\xi-2/3)^2}{(1/3)^2} & 2/3<\xi<1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Que operando queda como:

$$
\begin{aligned}
N_{0,2} &= \left\{ 1-6\xi+9\xi^2 \qquad 0<\xi<1/3 \right. \\
N_{1,2} &= \left\{ 6\xi-18\xi^2 \qquad 0<\xi<1/3 \right. \\
N_{2,2} &= \begin{cases} 9\xi^2 & 0<\xi<1/3 \\ 4-12\xi+9\xi^2 & 1/3<\xi<2/3 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \begin{cases} -7/2+15\xi-\xi^2/6 & 1/3<\xi<2/3 \\ 9/2-9\xi+9/2\xi^2 & 2/3<\xi<1 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \begin{cases} 1/2-3\xi+9/2\xi^2 & 1/3<\xi<2/3 \\ -15/2+21\xi-27/2\xi^2 & 2/3<\xi<1 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \left\{ 4-12\xi+9\xi^2 \qquad 2/3<\xi<1 \right.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

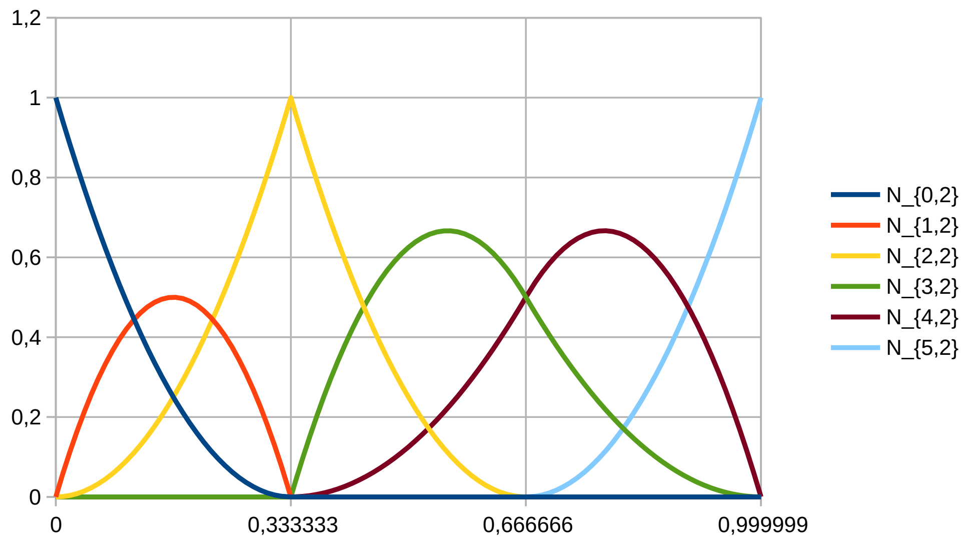

Figura 3: Bases de B-splines de orden 2 con un knot intermedio repetido.

De modo que el B-spline de interpolación quedaría tal y como se puede observar en la figura 4.

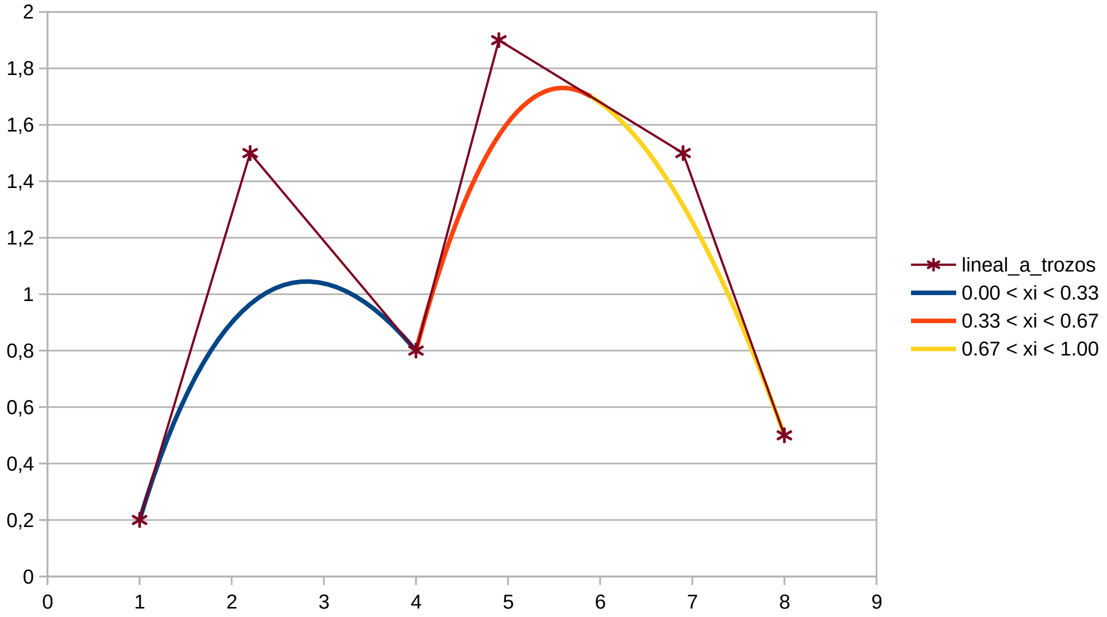

Figura 4: Interpolación mediante B-spline abierto y uniforme de orden 2 con el primer knot interior repetido.