

– Typeset by GMNI & Foil_{TEX} –

INTERPOLACIÓN POR B-SPLINES

F. Navarrina & GMNI



GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: <http://caminos.udc.es/gmni>





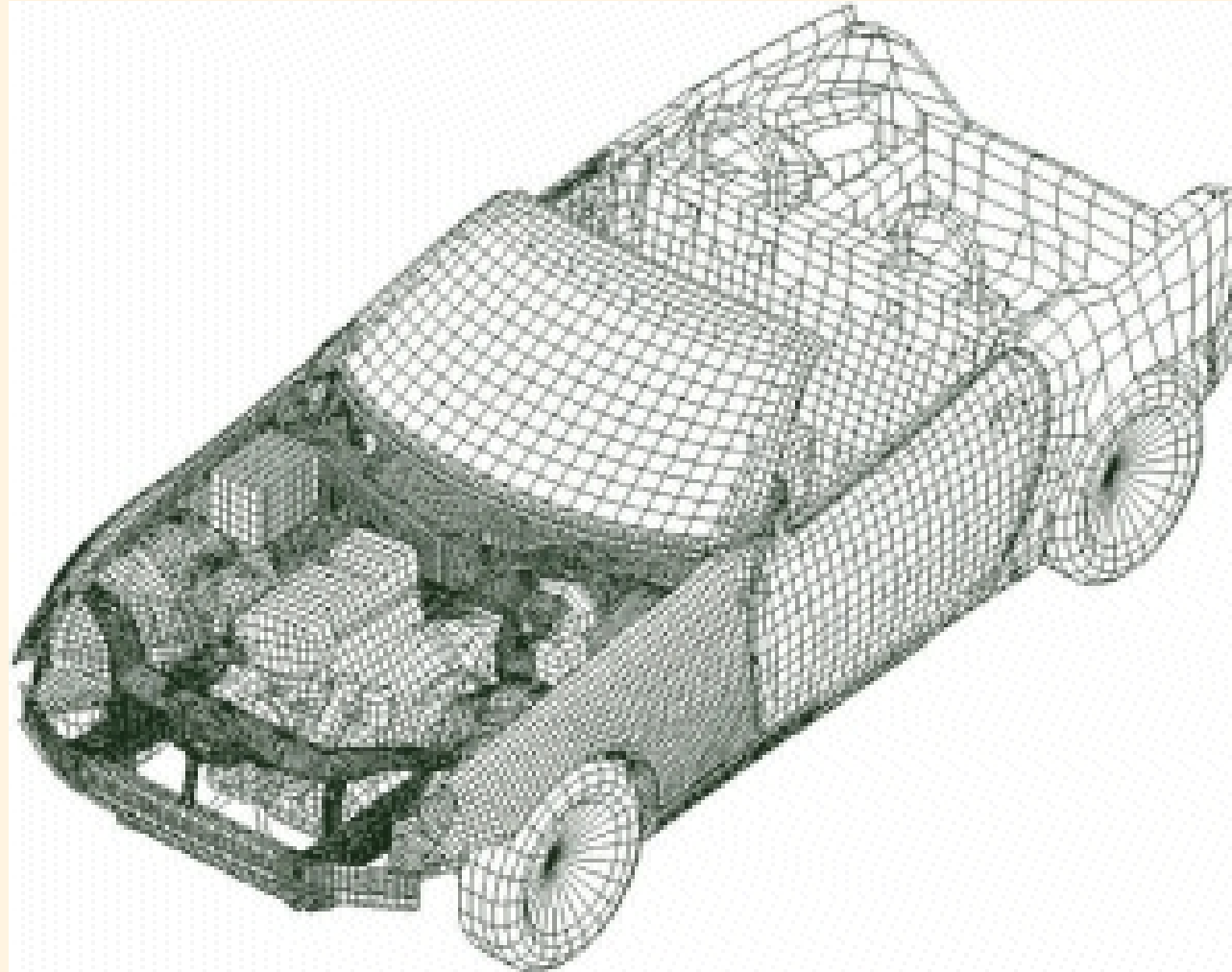
Índice

- ▶ Motivación
- ▶ Splines de clase C^0
- ▶ Interpolación para CAD
- ▶ Curvas de Bézier
- ▶ B-Splines
- ▶ NURBS
- ▶ B-Splines 2D y 3D
- ▶ T-Splines
- ▶ **IGA**





Motivación (I)



Modelo MEF de clase C^0 de un coche. Por cortesía de <http://msc.commas.uni-stuttgart.de>





Motivación (Ila)



LAMBORGHINI CONCEPT

Modelo CAD de un coche. Por cortesía de Flavio Adriani y Rhinoceros <http://www.rhino3d.com/>





Motivación (IIb)

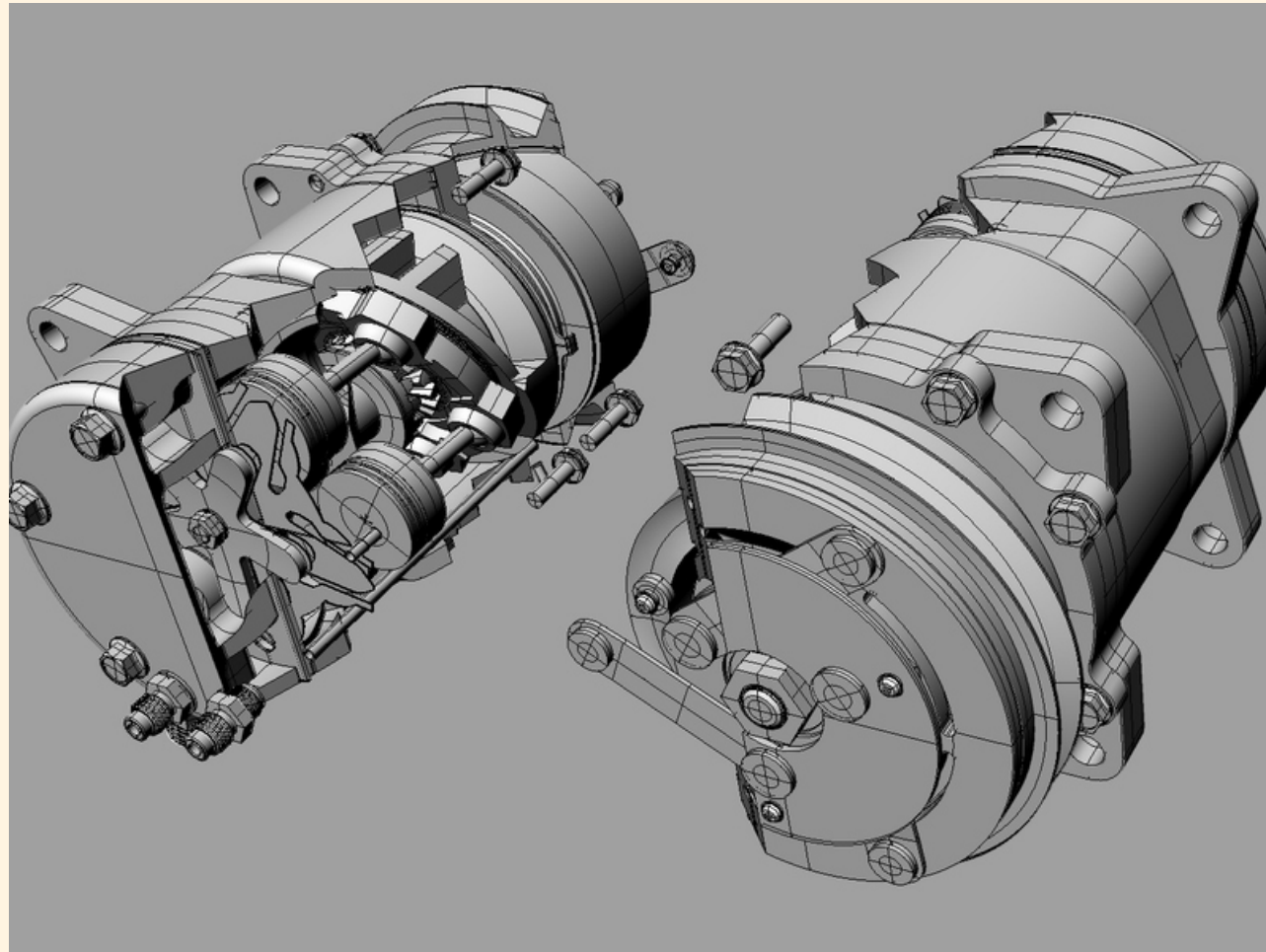


Modelo CAD de un coche. Por cortesía de Tibor Toth <<http://www.tsplines.com/community/gallery.html>>





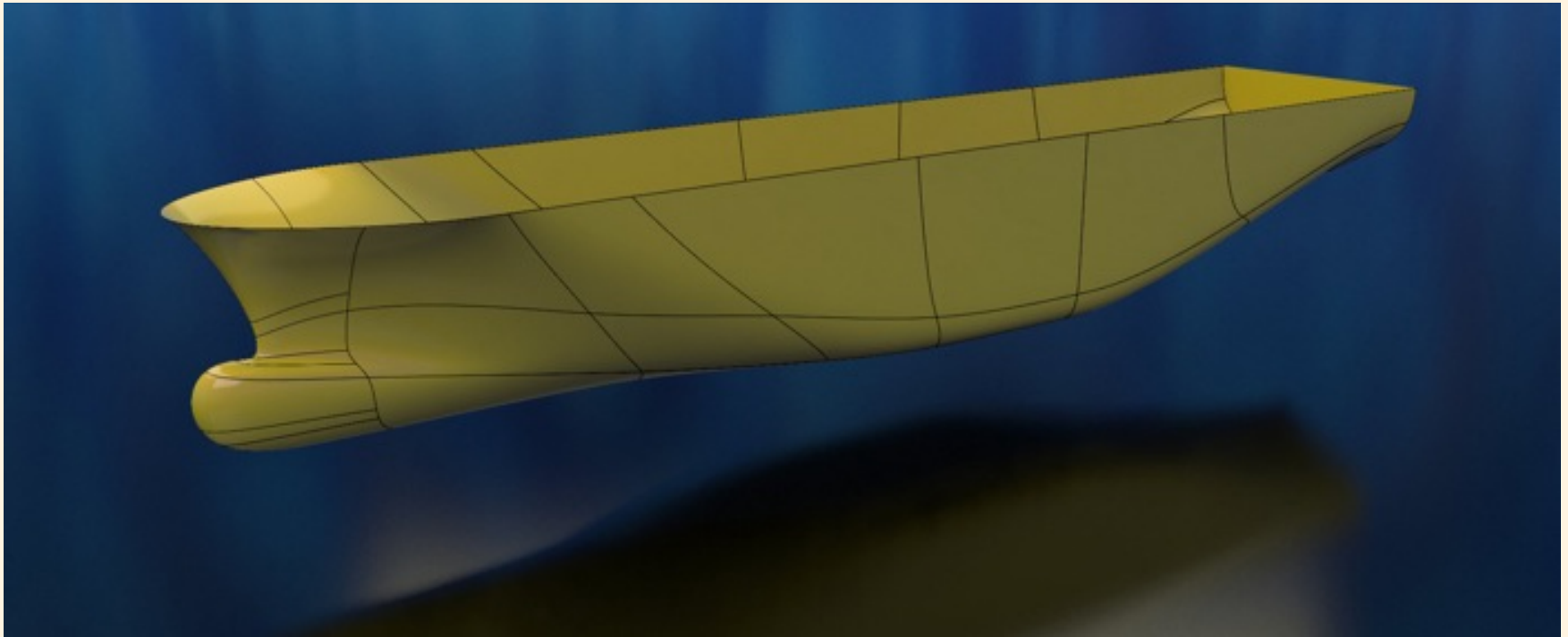
Motivación (IIC)



Modelo CAD de un compresor de AC. Por cortesía de Jayon Park y Rhinoceros <http://www.rhino3d.com/>



Motivación (IId)

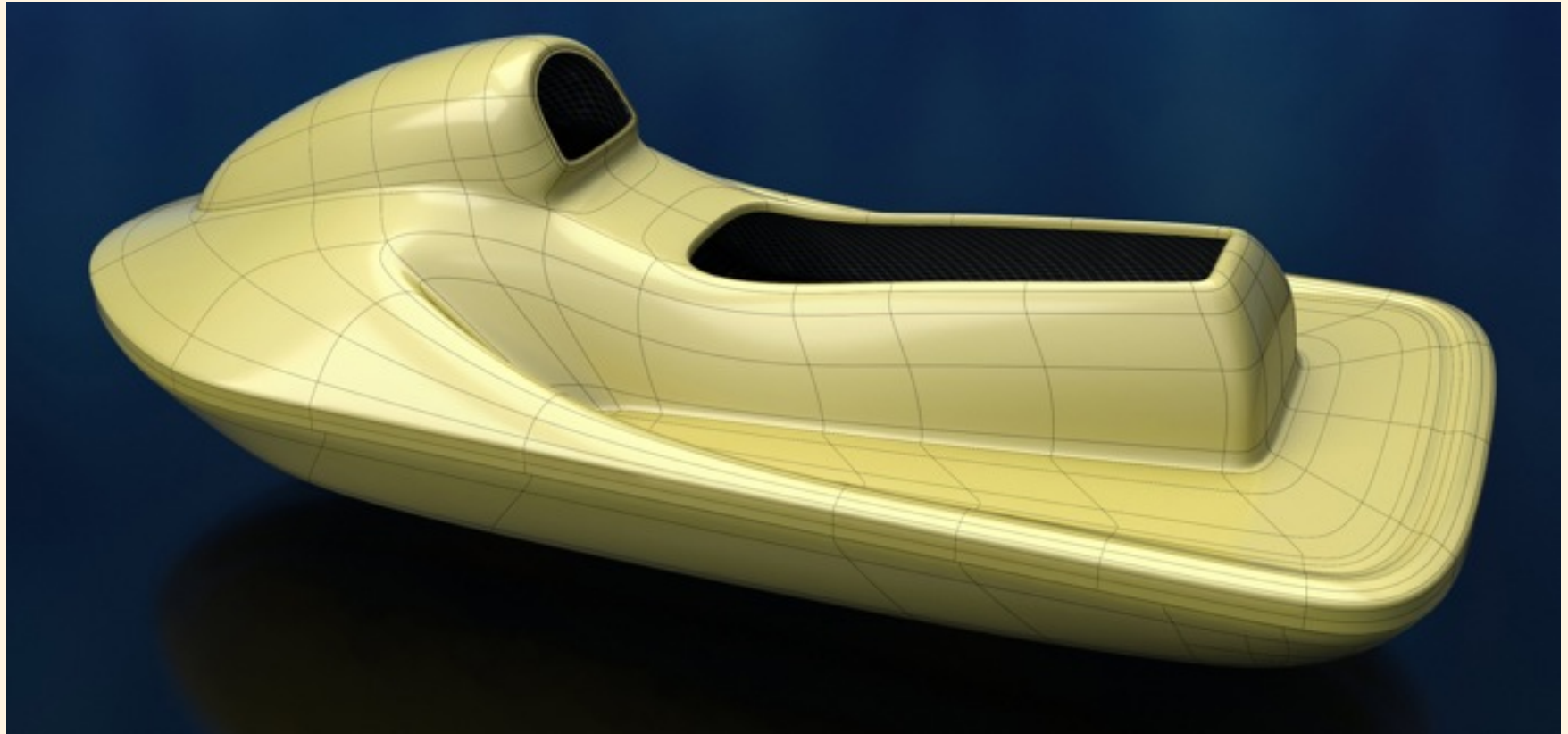


Modelo CAD del casco de un buque. Por cortesía de <http://www.tsplines.com/community/gallery.html>





Motivación (Ile)



Modelo CAD del casco de una moto acuática. Por cortesía de

<http://www.tsplines.com/community/gallery.html>





Motivación (Ilf)



Modelo CAD del casco de un yate. Por cortesía de Nordhavn Yachts y Rhinoceros <http://www.rhino3d.com/>





ELEMENTOS FINITOS LAGRANGIANOS 1D

El dominio Ω se **discretiza** (subdivide) en **elementos finitos** E_{ie} ,

$$\Omega = \bigcup_{ie=1}^{ne} E_{ie}, \quad \text{siendo} \quad \overset{\circ}{E}_{ie1} \cap \overset{\circ}{E}_{ie2} = \emptyset \quad \forall ie1 \neq ie2.$$

El elemento E_{ie} se define por sus nn **nodos**, siendo

$$\begin{cases} \xi_{jn} \in [-1, 1] & \rightarrow \text{coord. de referencia} \\ \bar{r}_{jn,ie} & \rightarrow \text{coord. espaciales} \end{cases} \quad \text{de los nodos } jn = 1, \dots, nn.$$



Splines de clase C^0 (Ib)

Funciones de Forma Lagrangianas:

$$N_{in}(\xi) = \prod_{\substack{jn=1, \dots, nn \\ jn \neq in}} \frac{\xi - \xi_{jn}}{\xi_{in} - \xi_{jn}}, \quad \xi \in [-1, 1], \quad in=1, \dots, nn.$$

Nótese que

$$N_{in}(\xi_{jn}) = \delta_{in,jn} \rightarrow \text{interpolación pura en los nodos,}$$

$$\sum_{in=1}^{nn} N_{in}(\xi) = 1 \rightarrow \text{partición de la unidad. } (*)$$

(*) Capacidad para representar funciones constantes.





Splines de clase C^0 (Ic)

Interpolación Lagrangiana tipo MEF [Isoparamétrica]:

$$\bar{\mathbf{r}}^h \in E_{ie} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^h(\xi) = \sum_{in=1}^{nn} N_{in}(\xi) u_{in,ie}, \\ \bar{\mathbf{r}}^h(\xi) = \sum_{in=1}^{nn} N_{in}(\xi) \bar{\mathbf{r}}_{in,ie}, \end{array} \right. \quad \xi \in [-1, 1].$$

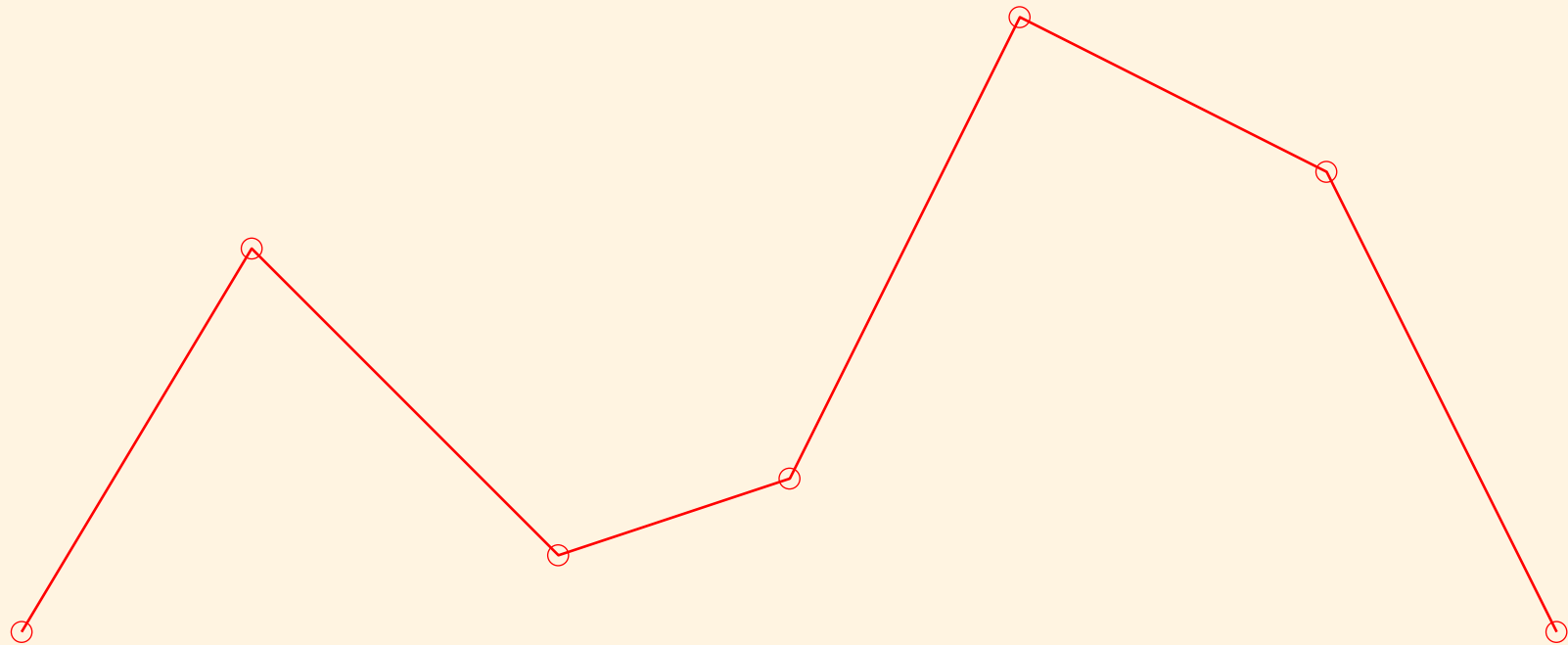
Nótese que

$$u^h(\xi_{jn}) = u_{jn,ie} \quad \leftarrow \text{interpolación pura en los nodos,}$$
$$u_{jn,ie} = k \Rightarrow u^h(\xi) = k \quad \forall \xi \in [-1, 1] \quad \leftarrow \text{partición de la unidad.}$$





Splines de clase C^0 (Id1-1)

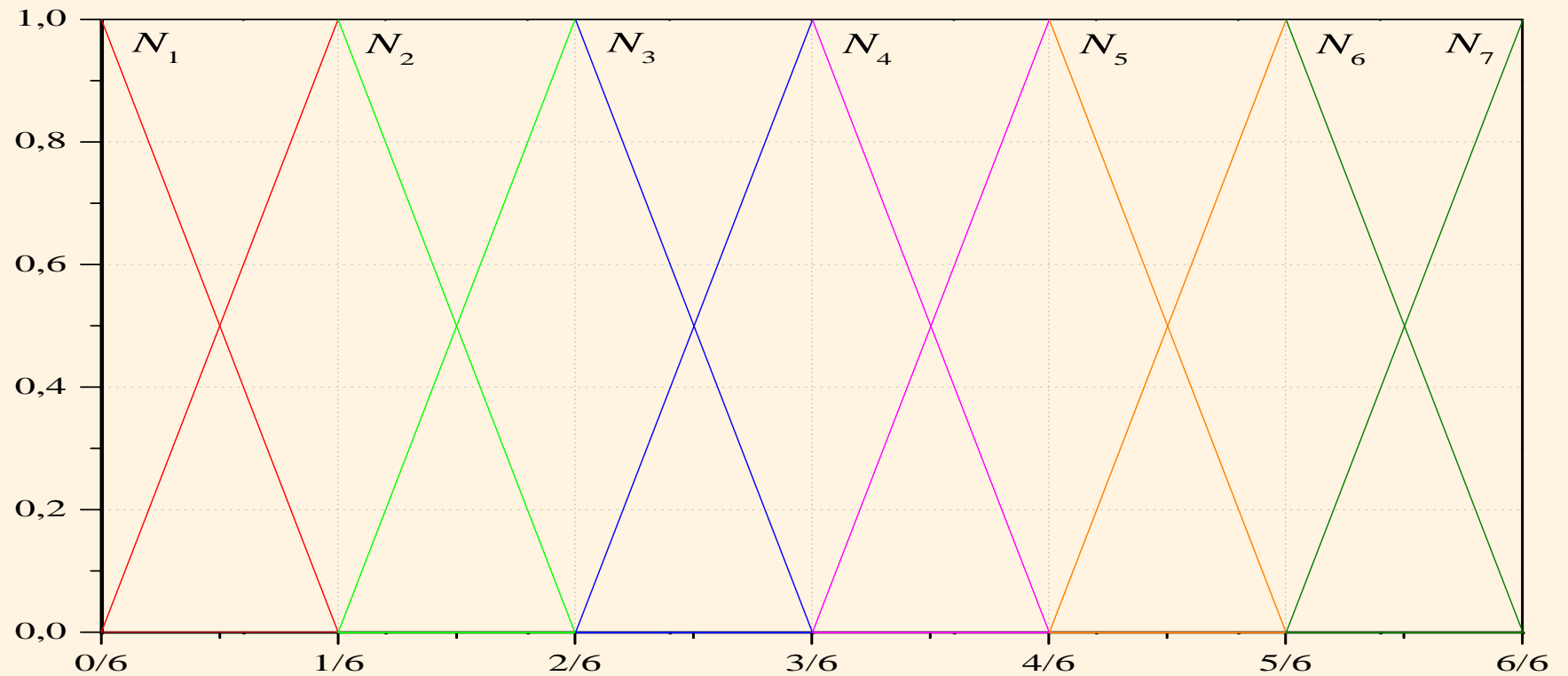


Malla MEF: PUNTOS NODALES (poligonal)





Splines de clase C^0 (Id1-2)

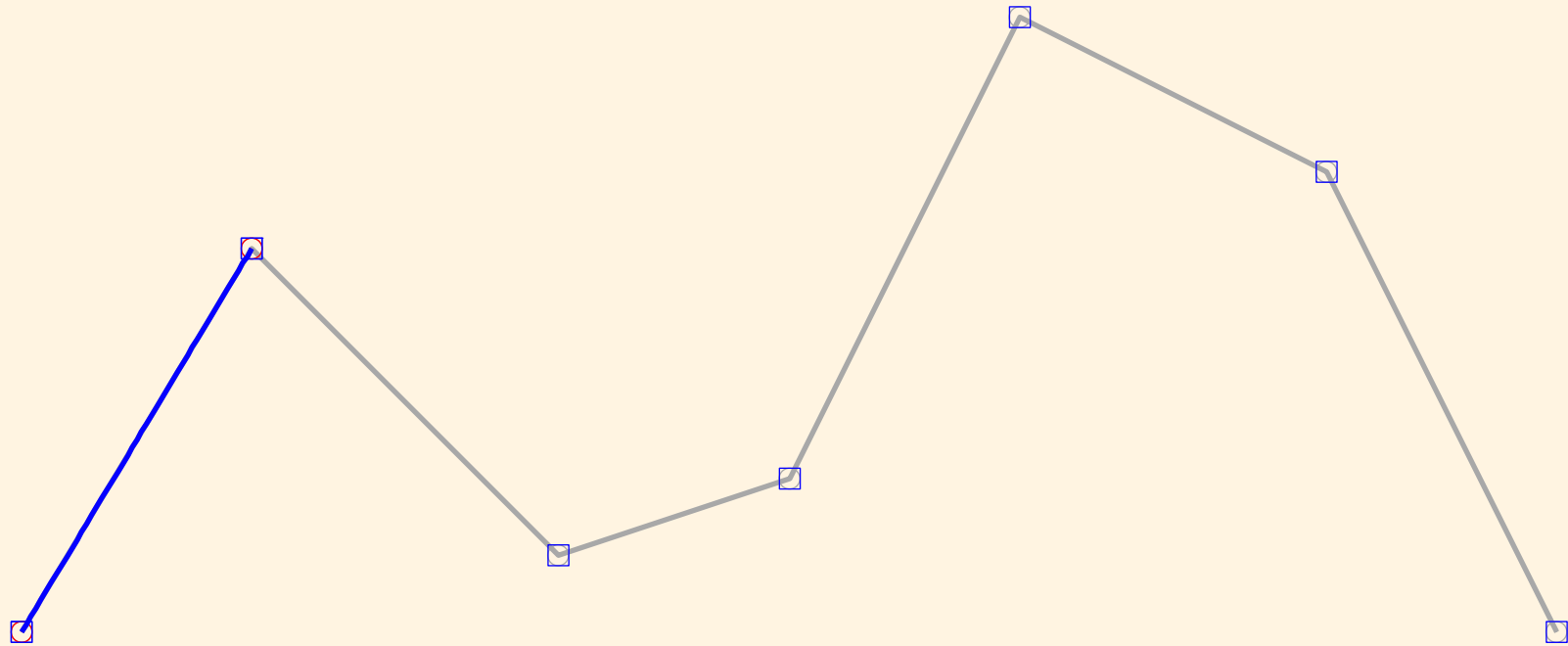


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: FUNCIONES DE FORMA (comb.) [LOCALES]





Splines de clase C^0 (Id2-1)

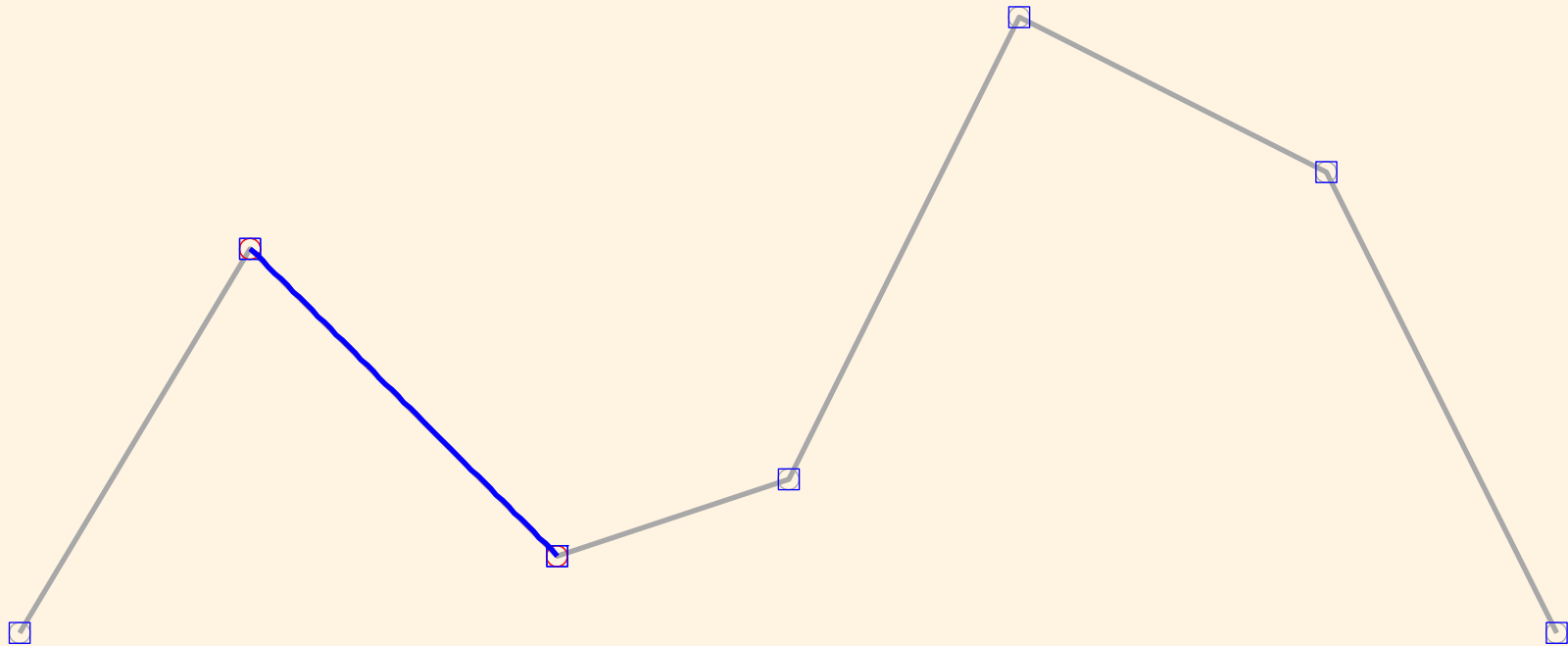


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 1





Splines de clase C^0 (Id2-2)

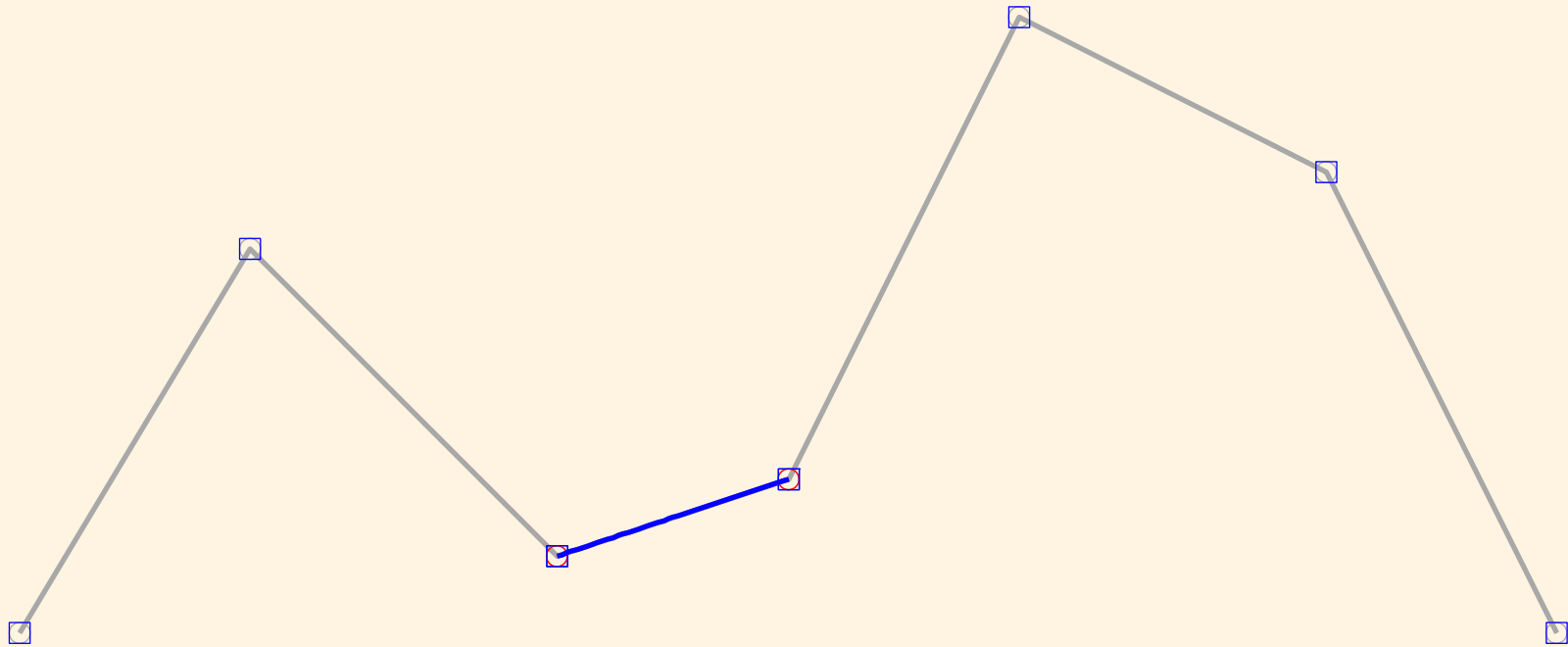


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 2





Splines de clase C^0 (Id2-3)

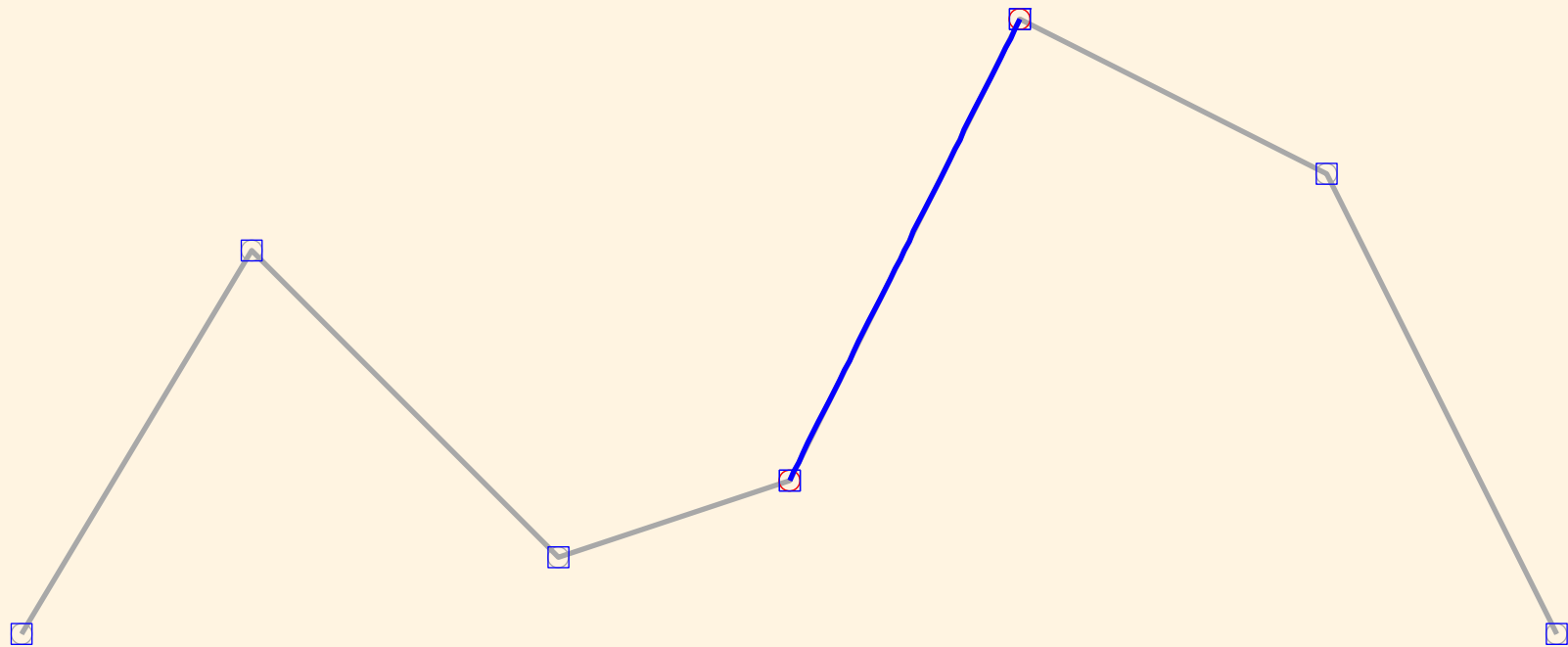


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 3





Splines de clase C^0 (Id2-4)

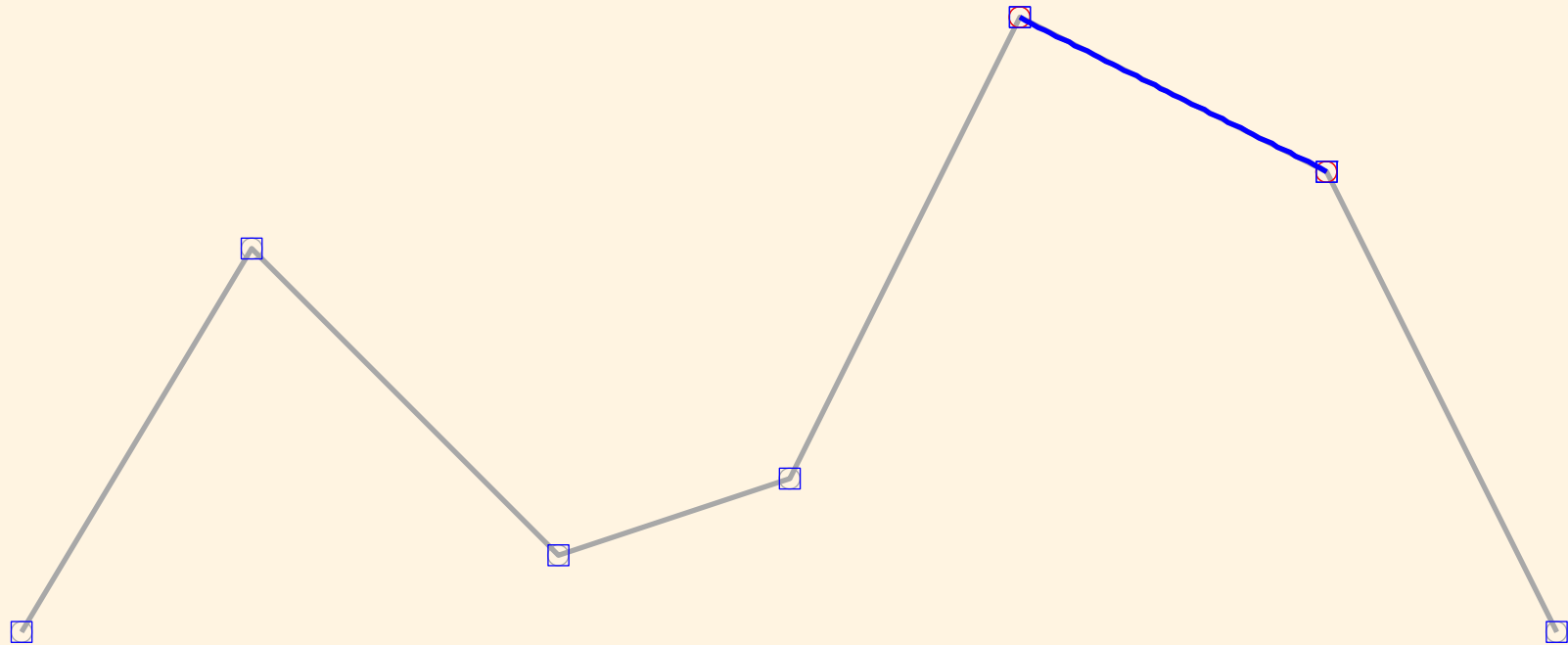


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 4





Splines de clase C^0 (Id2-5)

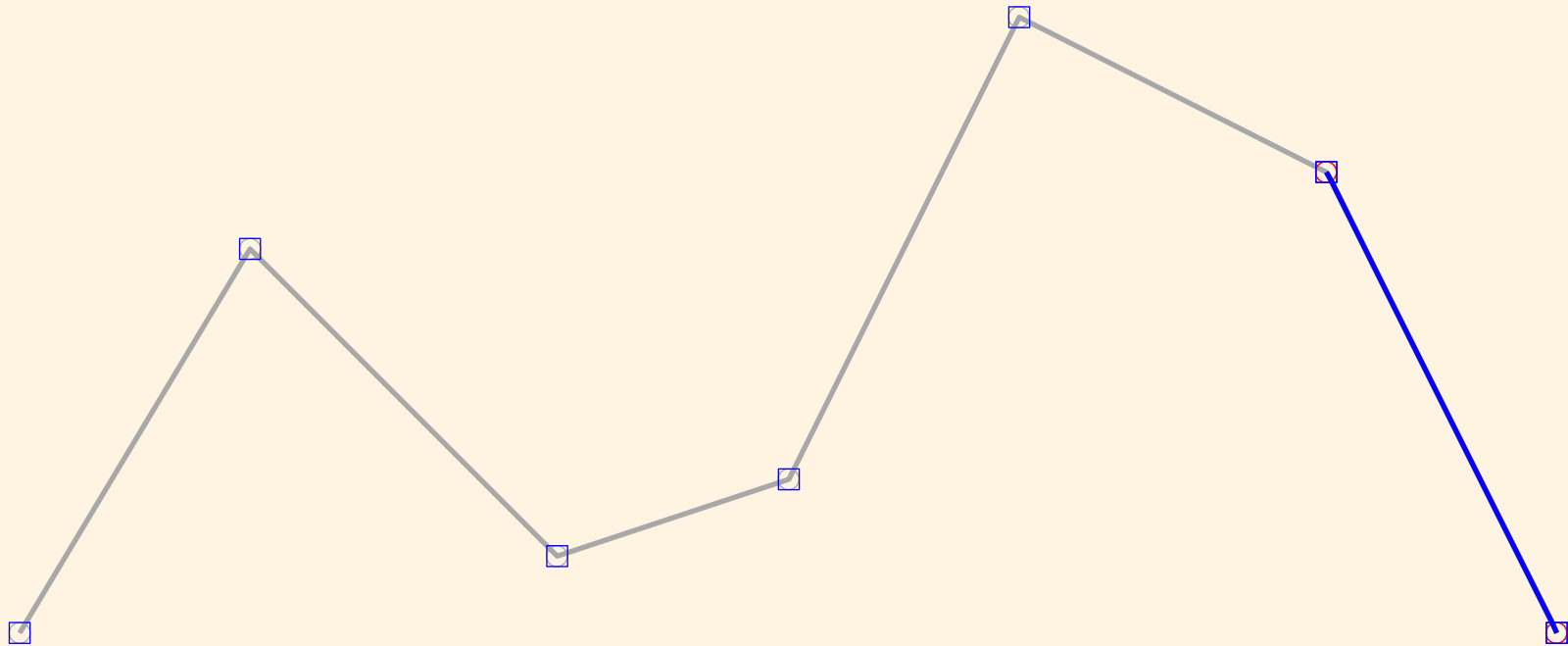


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 5





Splines de clase C^0 (Id2-6)

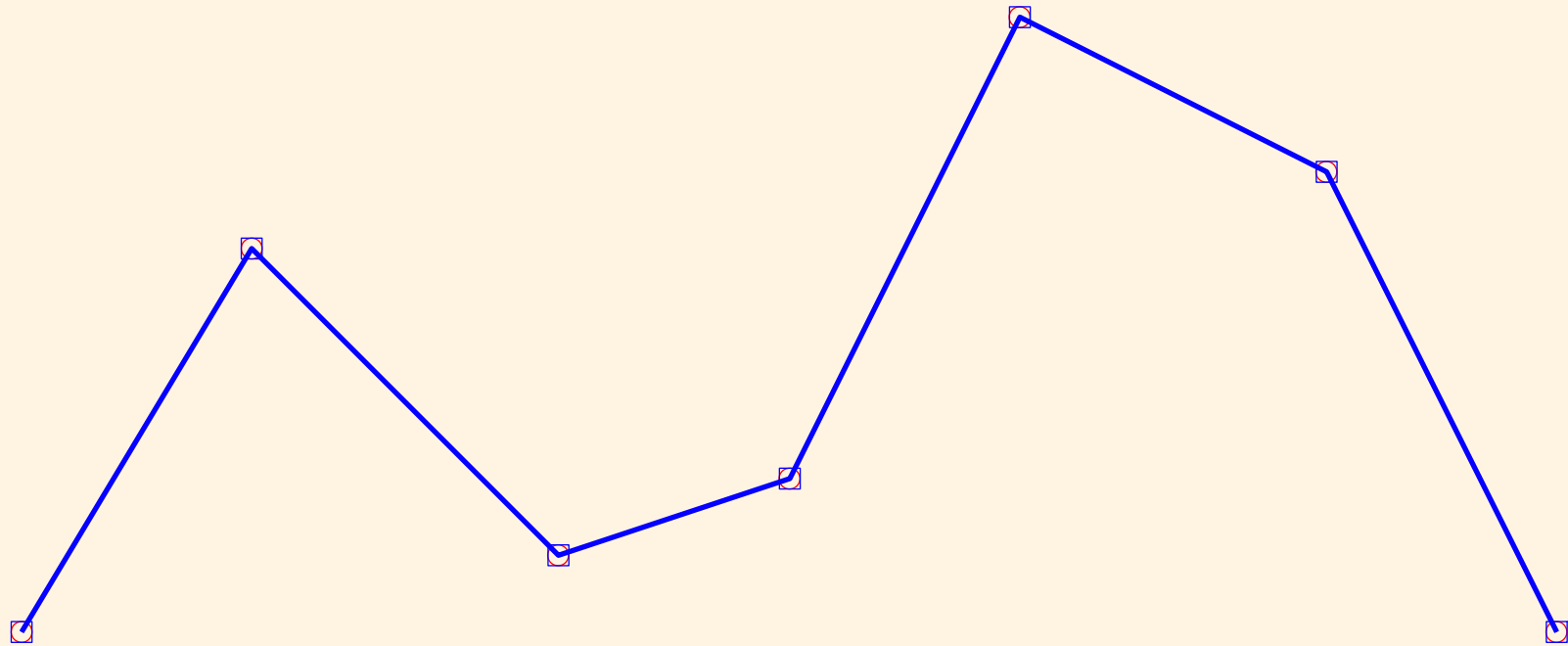


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 6





Splines de clase C^0 (Id3)

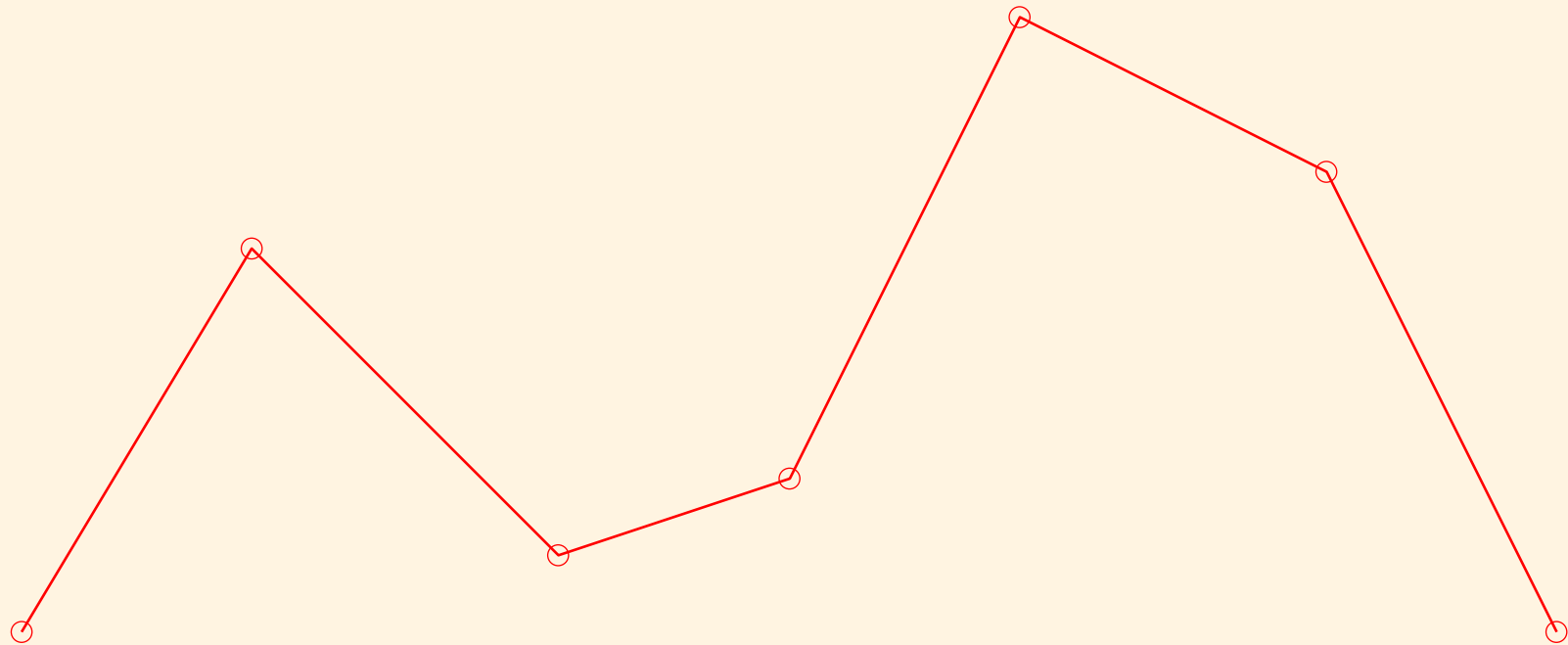


Malla MEF / ELEMENTOS LINEALES DE 2 NODOS: GEOMETRÍA INTERP.





Splines de clase C^0 (le1-1)

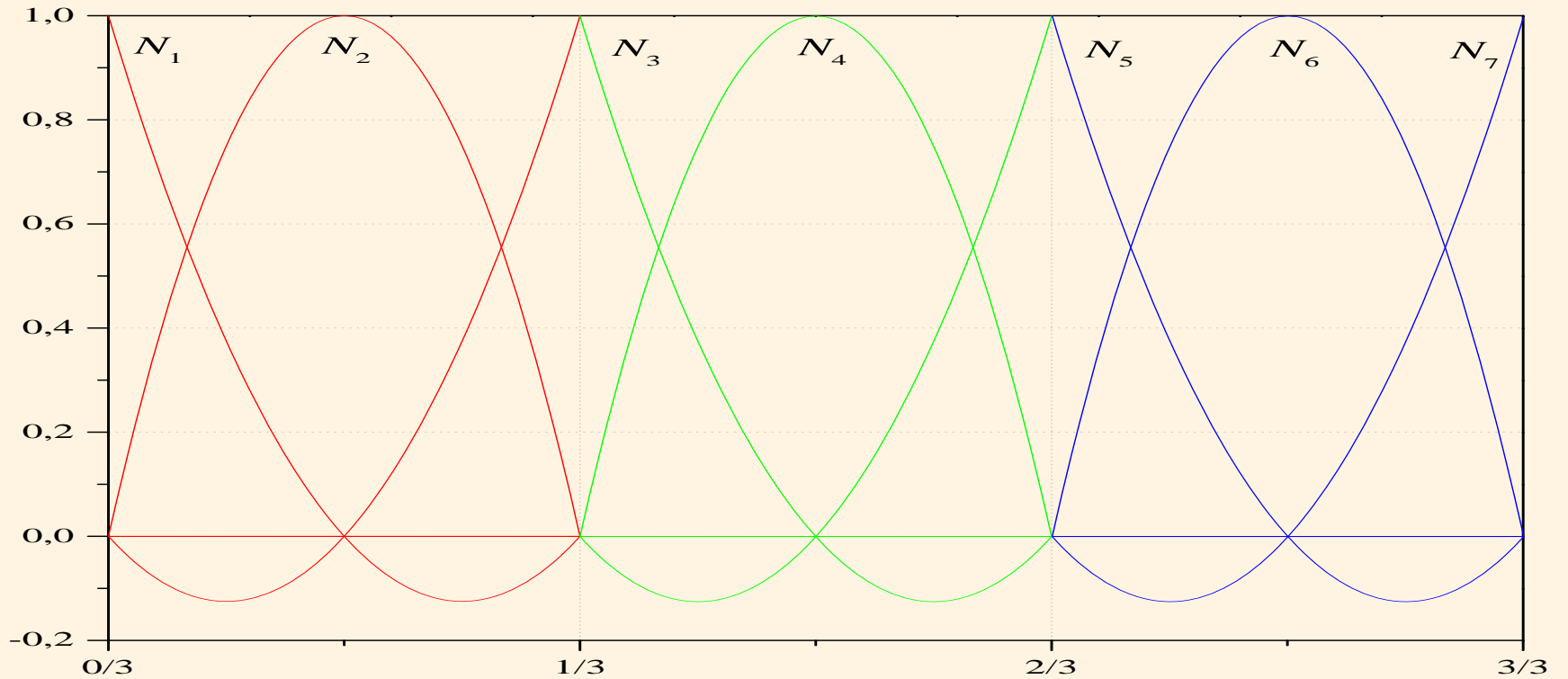


Malla MEF: PUNTOS NODALES (poligonal)





Splines de clase C^0 (le1-2)

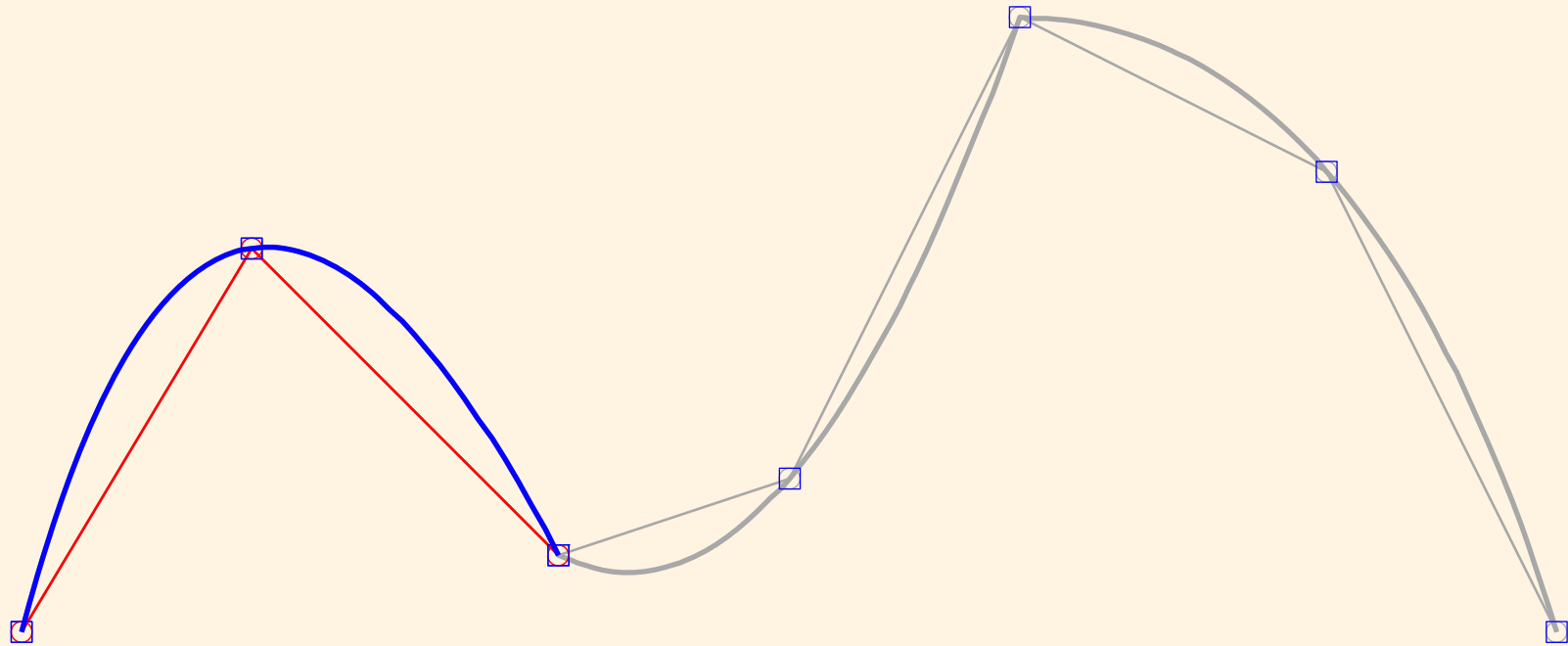


Malla MEF / ELEMENTOS CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: FUNCIONES DE FORMA (comb.) [LOCALES]





Splines de clase C^0 (le2-1)

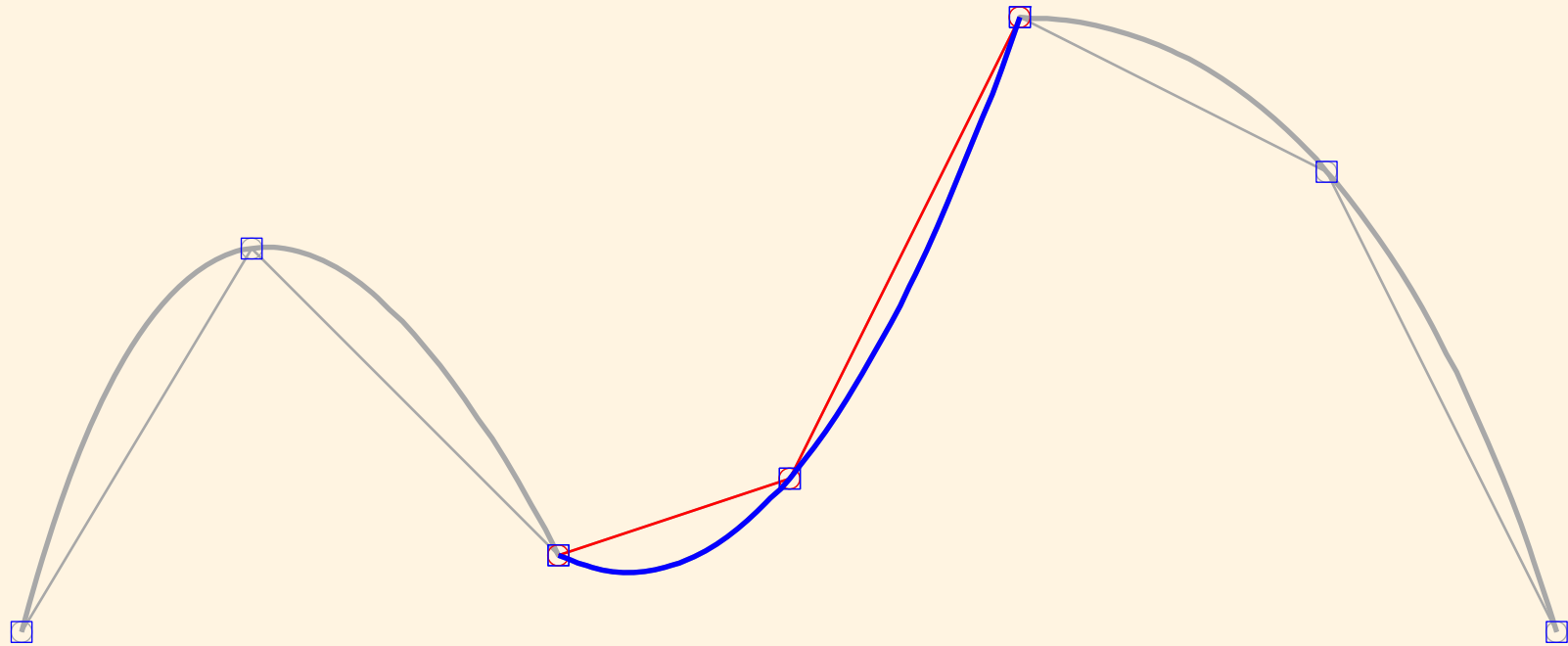


Malla MEF / ELEMENTOS CUADRÁTICOS DE 3 NODOS GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 1





Splines de clase C^0 (le2-2)

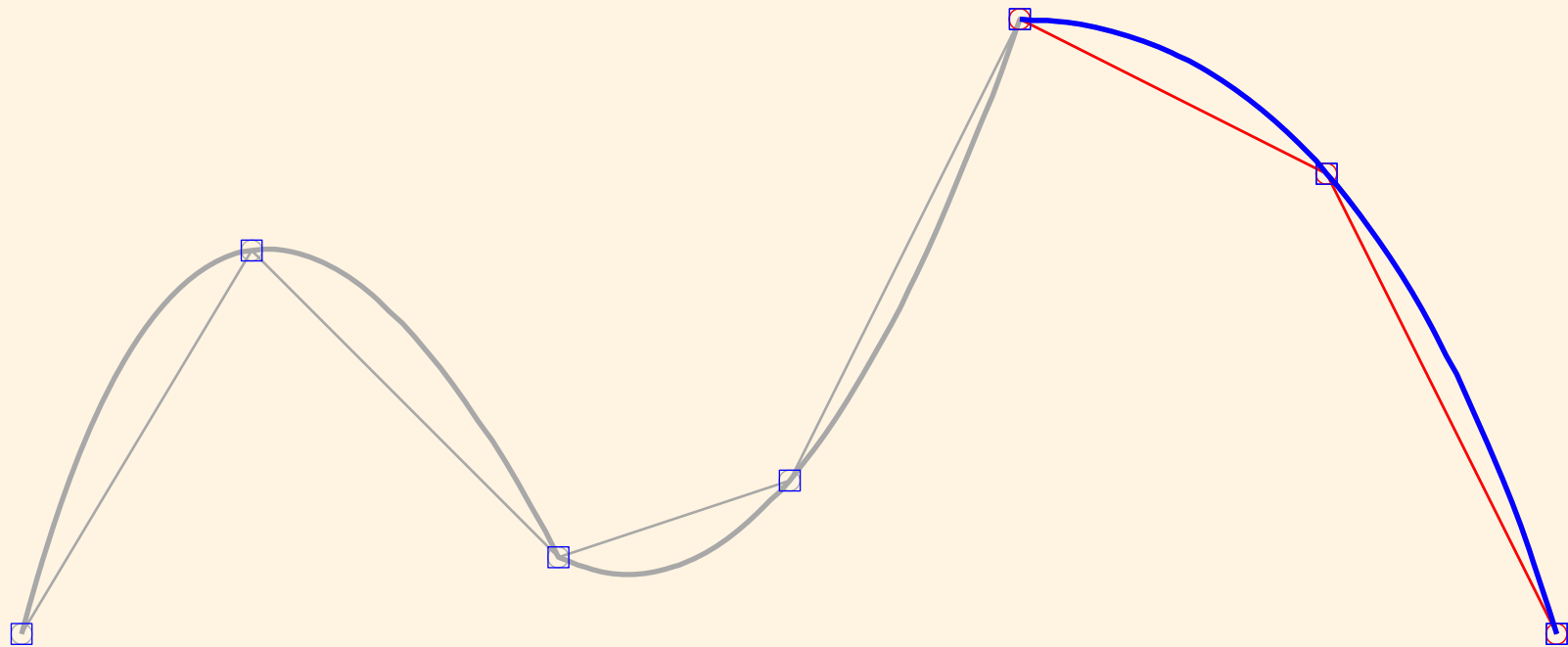


Malla MEF / ELEMENTOS CUADRÁTICOS DE 3 NODOS GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 2





Splines de clase C^0 (le2-3)

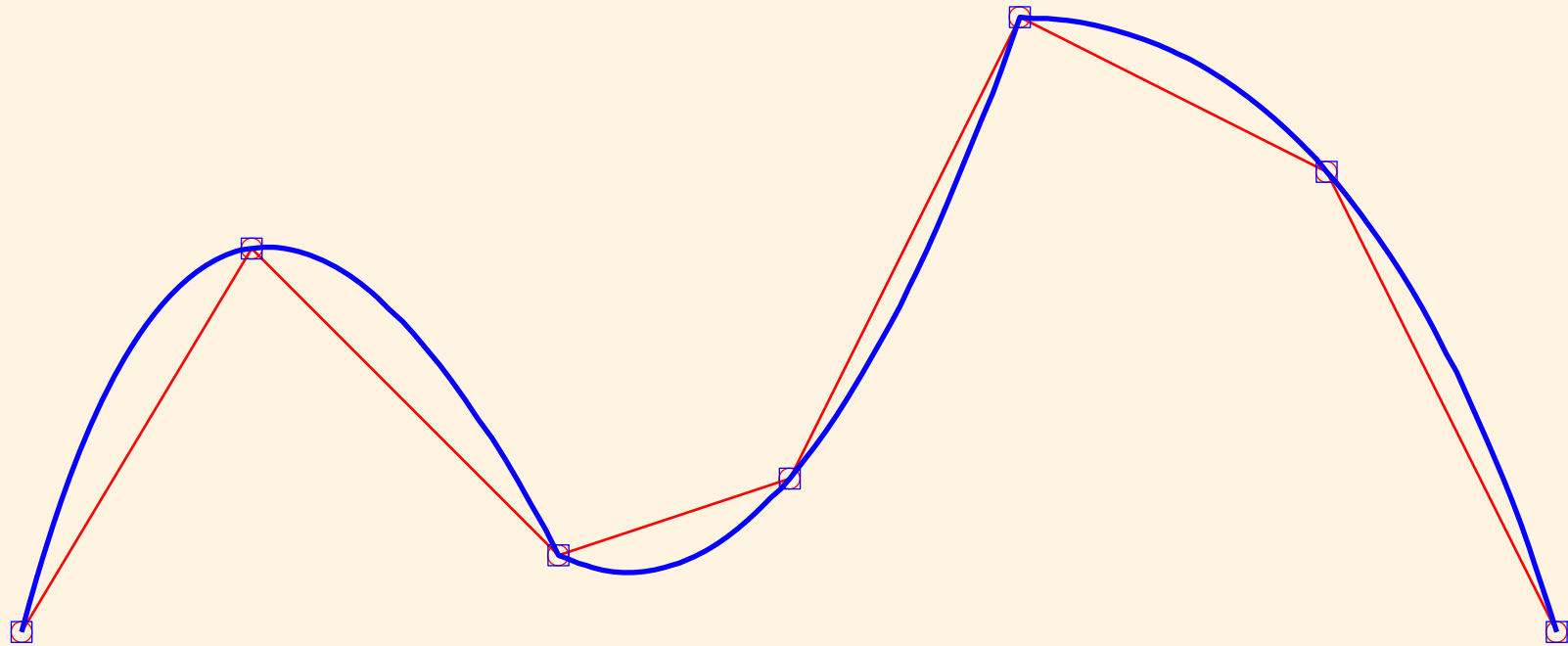


Malla MEF / ELEMENTOS CUADRÁTICOS DE 3 NODOS GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 3





Splines de clase C^0 (le3)



Malla MEF / ELEMENTOS CUADRÁTICOS DE 3 NODOS GEOMETRÍA INTERP.





Interpolación para CAD

Hitos:

- 1959-1970 → **Bézier (Renault), Schoenberg** [CAD, B-Splines]
- 1971-1972 → **Cox – De Boor** [Formulación recursiva de B-Splines]
- 1975 → **Versprille** [NURBS]
- 1980 → **Cohen et al.** [Oslo Knot Insertion]
- 1995 → **Piegl & Tiller** [Algoritmos Estables]
- 2003 → **Sederberg** [T-Splines]
- 2005 → **Hughes, Cottrell & Bazilevs** [IGA]





CURVAS DE BÉZIER

Polinomios de Bernstein:

$$B_{i,n}(\xi) = \binom{n-1}{i-1} \xi^{i-1} (1-\xi)^{n-i}, \quad \xi \in [0, 1], \quad i=1, \dots, n.$$

Nótese que

$$B_{i,n}(0) = \delta_{i,1}, \quad B_{i,n}(1) = \delta_{i,n} \quad \rightarrow \quad \text{interp. pura en puntos } 1, n,$$

$$\sum_{i=1}^n B_{i,n}(\xi) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{partición de la unidad.}$$



Curvas de Bézier (Ib)

Interpolación de Bézier:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{r}}^h(\xi) = \sum_{i=1}^n B_{i,n}(\xi) \bar{\mathbf{r}}_i, \\ u^h(\xi) = \sum_{i=1}^n B_{i,n}(\xi) u_i, \end{array} \right. \quad \xi \in [0, 1].$$

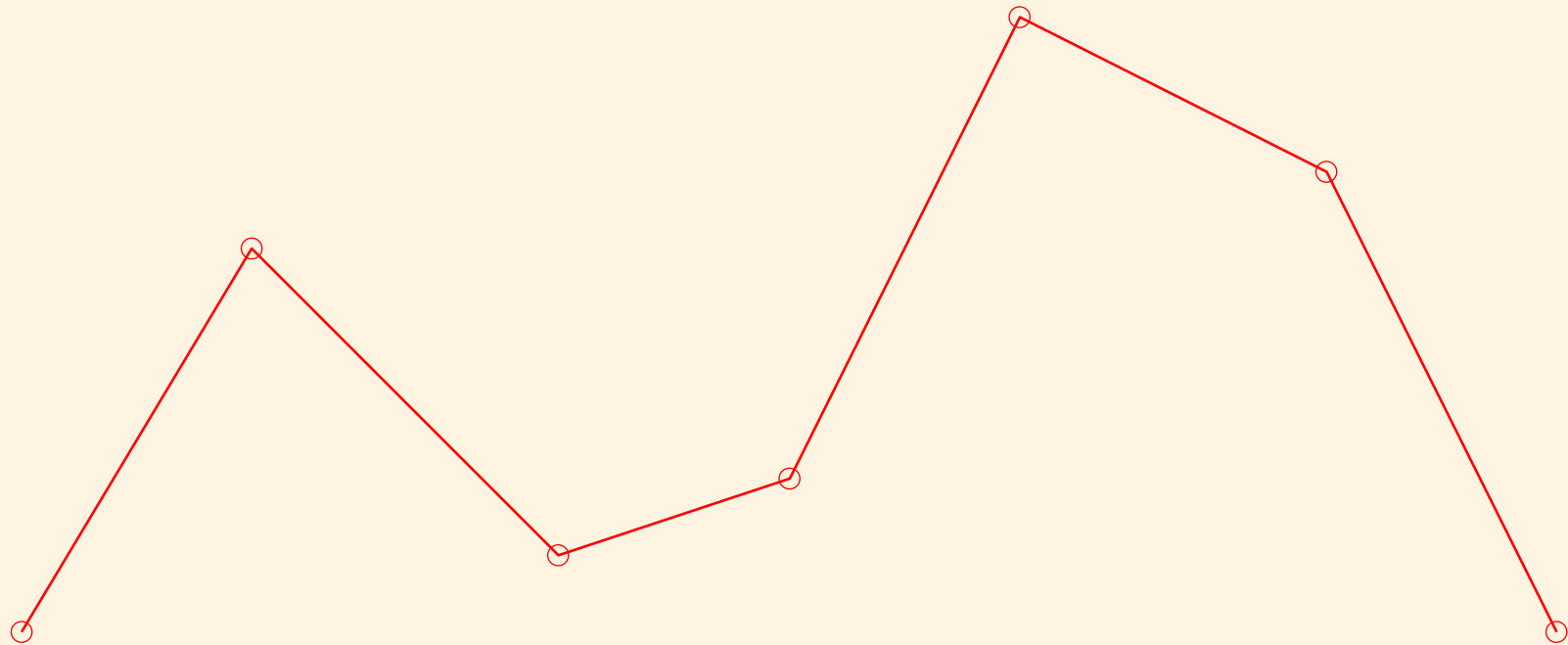
Nótese que

$$\begin{array}{ll} u^h(0) = u_1, \quad u^h(1) = u_n, & \leftarrow \text{interp. pura en puntos de control } 1, n, \\ u_i = k \Rightarrow u^h(\xi) = k \quad \forall \xi \in [0, 1] & \leftarrow \text{partición de la unidad.} \end{array}$$





Curvas de Bézier (Ic1-1)

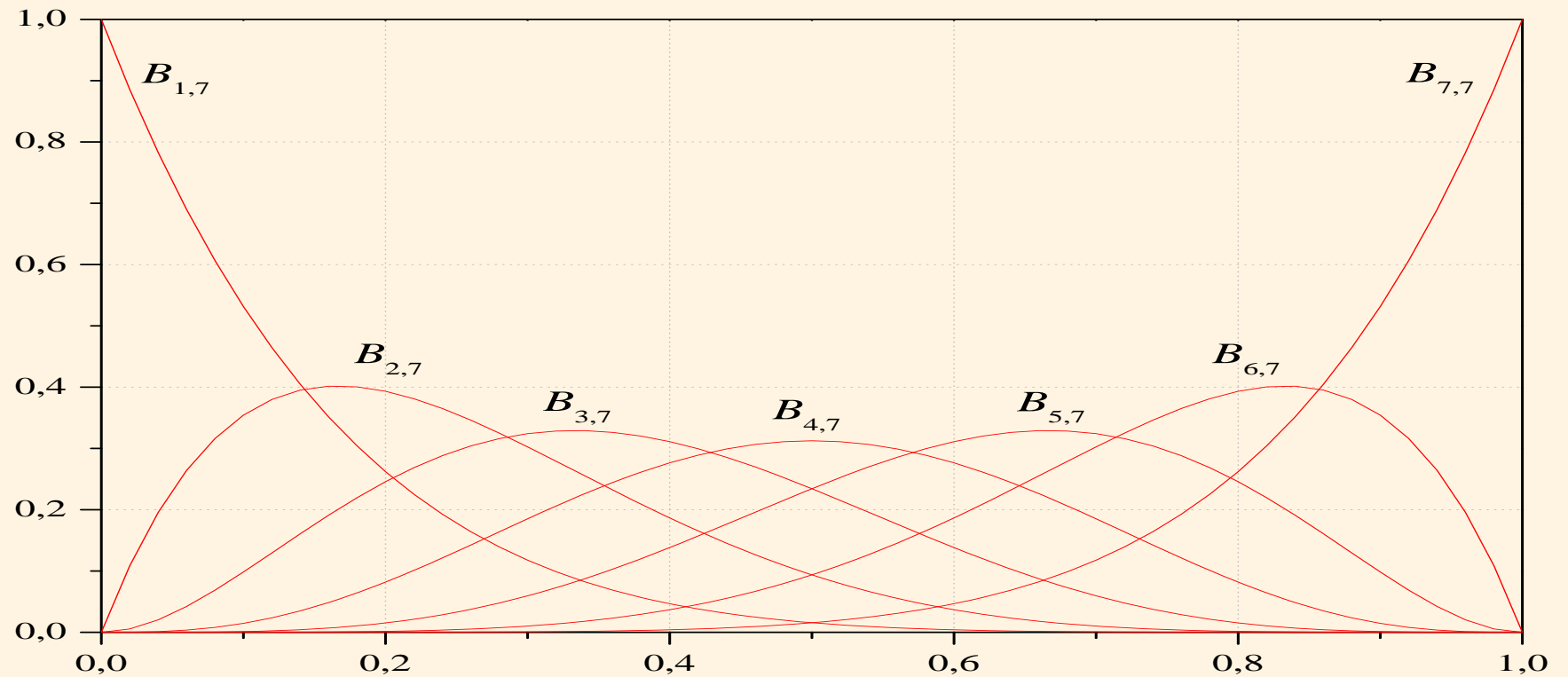


Interpolación de Bézier: PUNTOS DE CONTROL (polígono)





Curvas de Bézier (Ic1-2)

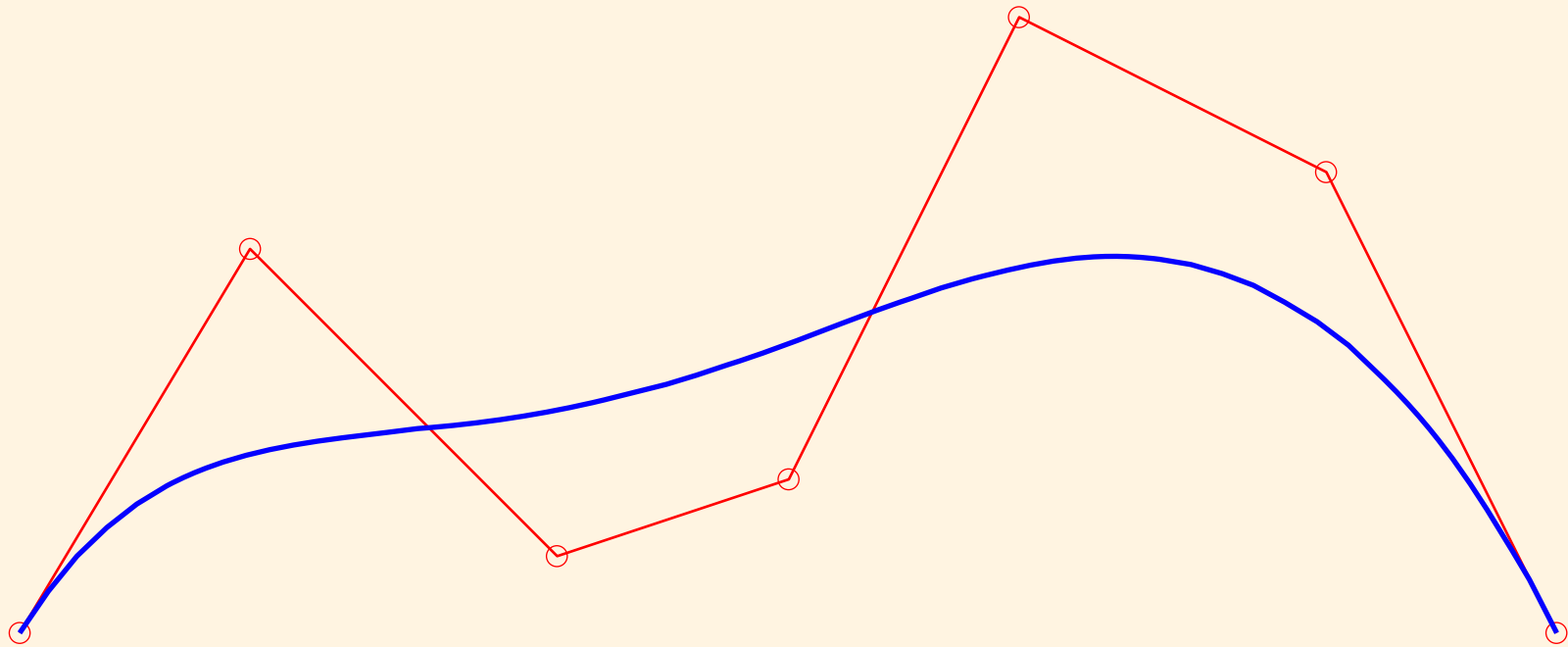


Interpolación de Bézier: FUNCIONES DE FORMA [GLOBALES]





Curvas de Bézier (Ic2)



Interpolación de Bézier: GEOMETRÍA INTERP.





B-Splines (I)

KNOT VECTOR

$$\Xi = [\xi_1, \dots, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{n+p+1}], \xi_j \in \mathbb{R} \quad \forall j.$$

donde

$\xi_j \equiv$ **knot**,

$\xi_i \leq \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n + p \rightarrow$ secuencia no decreciente, (*)

$[\xi_i, \xi_{i+1}] \equiv$ **knot span**,

$n \equiv$ número of **funciones base**,

$p \equiv$ **grado de los polinomios**.

(*) Pero la **multiplicidad** se **permite**! (Y tiene importantes efectos).





FÓRMULA RECURSIVA DE COX – DE BOOR

$$N_{i,q}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \begin{cases} q = 0, \\ i = 1, \dots, n + (p - q). \end{cases}$$

$$N_{i,q}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+q} - \xi_i} \right) N_{i,q-1}(\xi) + \left(\frac{\xi_{i+q+1} - \xi}{\xi_{i+q+1} - \xi_{i+1}} \right) N_{i+1,q-1}(\xi), \quad \begin{cases} q = 1, \dots, p, \\ i = 1, \dots, n + (p - q). \end{cases}$$



B-Splines (Ila2)

Nótese que para $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_{n+p+1}$

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1, \quad \rightarrow \text{partición de la unidad}$$

$$N_{i,p}(\xi) \geq 0,$$

$$N_{i,p}(\xi) \in C^{p-1} \quad (\text{si los knots se repiten}),$$

$$N_{i,p}(\xi) \neq 0 \quad \text{en } (p + 1) \text{ knot spans. } (*)$$

(*) Sorprendente! \rightarrow ancho de banda no muy grande.





B-Splines (IIa3)

Si un knot se repite, en el correspondiente valor de ξ . . .
. . . la aproximación

- ♣ pierde un orden de continuidad para cada repetición del knot,
- ♣ es interpolación pura si el knot se repite p veces,
- ♣ se convierte en discontinua si el knot se repite $p + 1$ veces.





Interpolación por B-Splines:

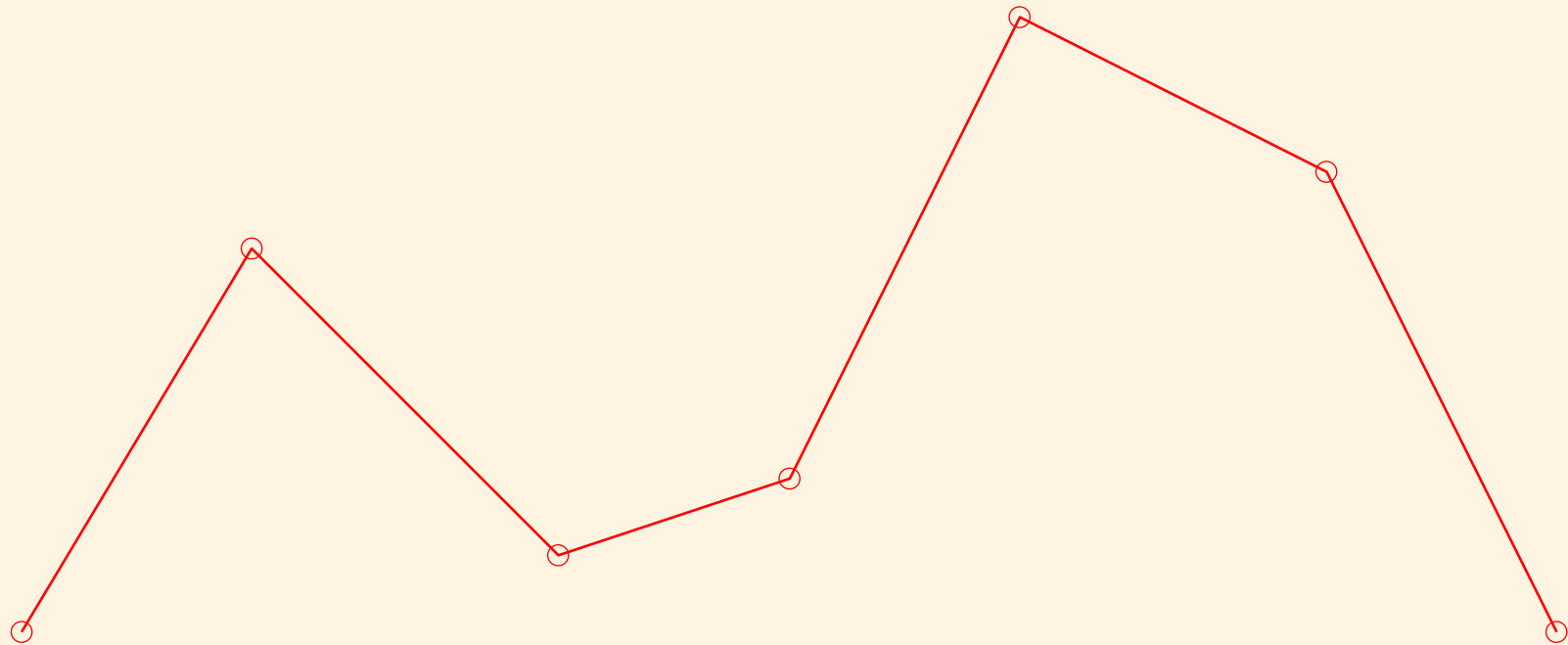
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{r}}^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \bar{\mathbf{r}}_i, \\ u^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) u_i, \end{array} \right. \quad \xi \in [0, 1].$$

Nótese que

$$\begin{array}{ll} u^h(\xi) \neq u_i & \leftarrow \text{no es interp. pura (salvo repetición de knots),} \\ u_i = k \Rightarrow u^h(\xi) = k \quad \forall \xi \in [0, 1] & \leftarrow \text{partición de la unidad.} \end{array}$$



B-Splines (IIC1-1)

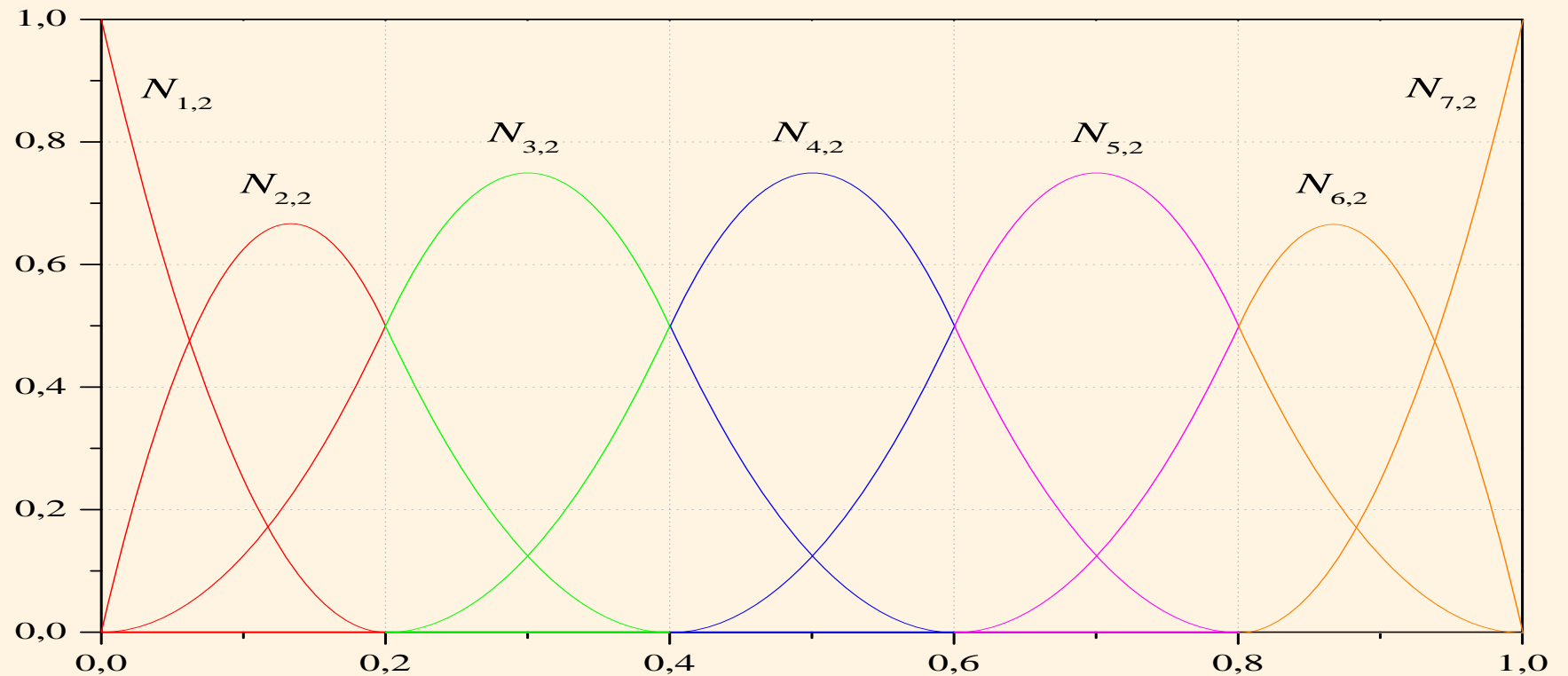


Interp. por B-Splines: PUNTOS DE CONTROL (poligonal)





B-Splines (Ilc1-2)



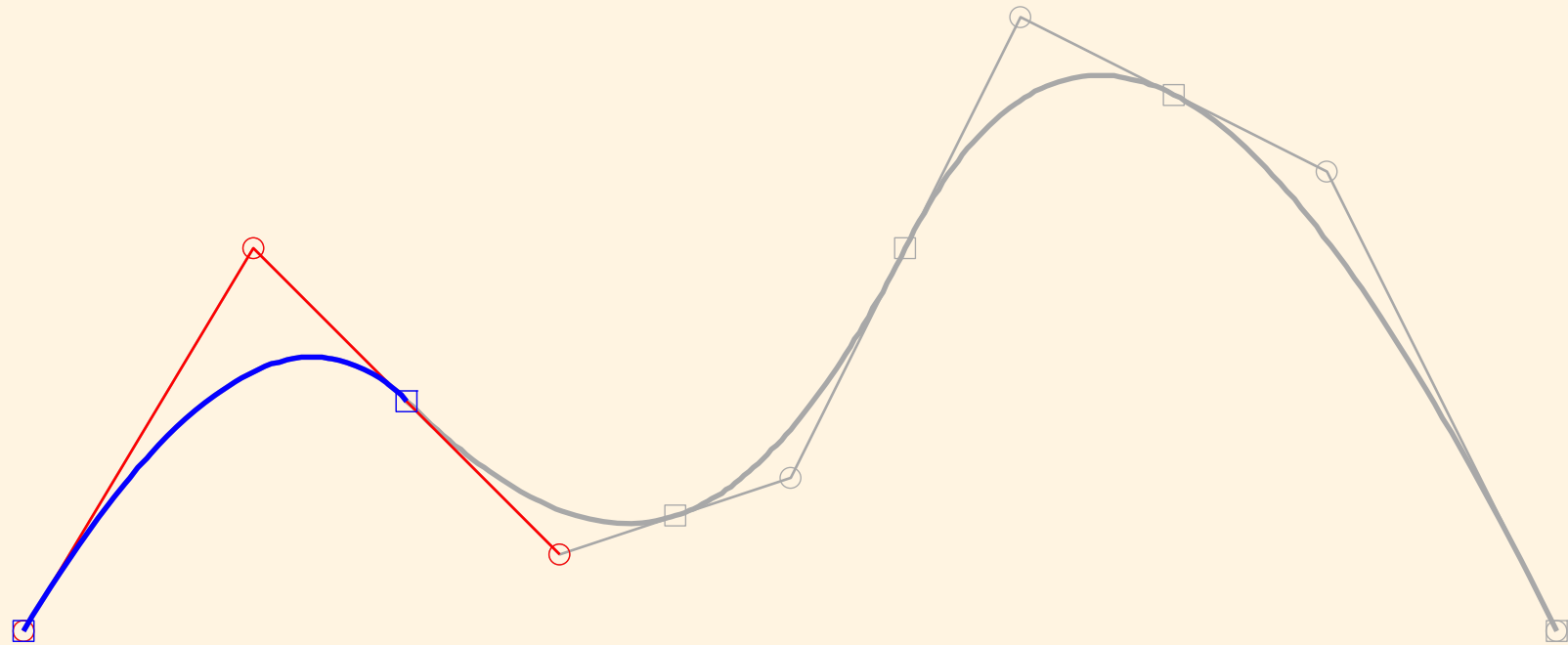
Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: FUNCIONES DE FORMA [LOCALES]

$n = 7$, $p = 2$; $\Xi = [0.00, 0.00, 0.00, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00, 1.00, 1.00]$ ← OPEN & UNIFORM





B-Splines (IIC2-1)

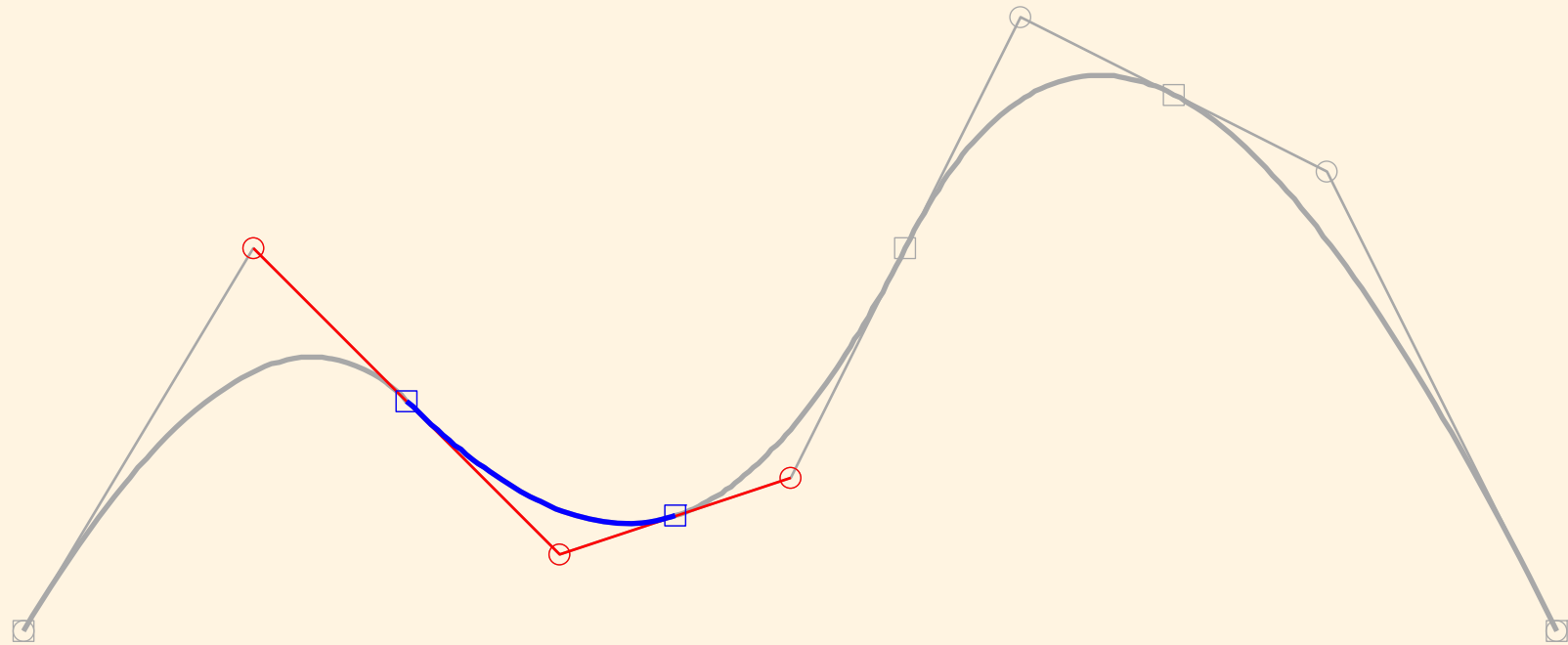


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 1





B-Splines (IIC2-2)

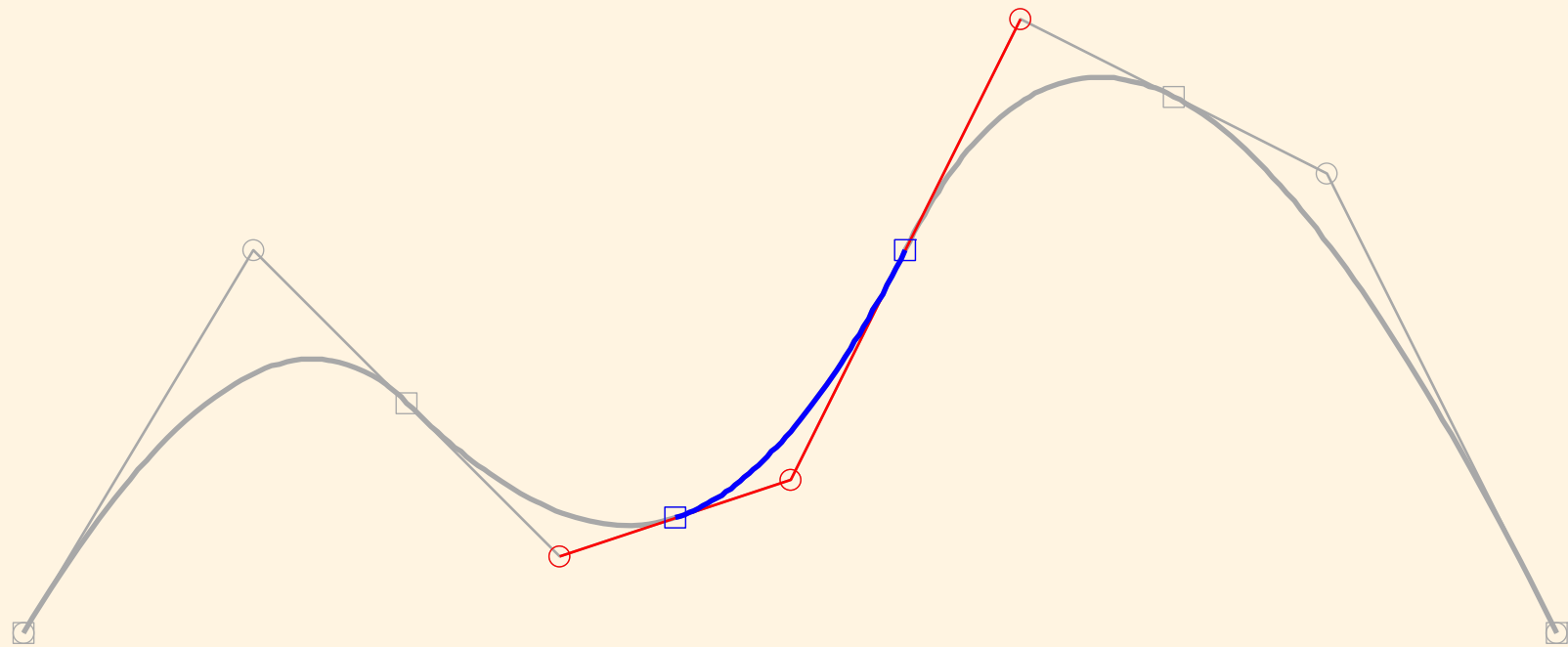


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 2





B-Splines (IIC2-3)

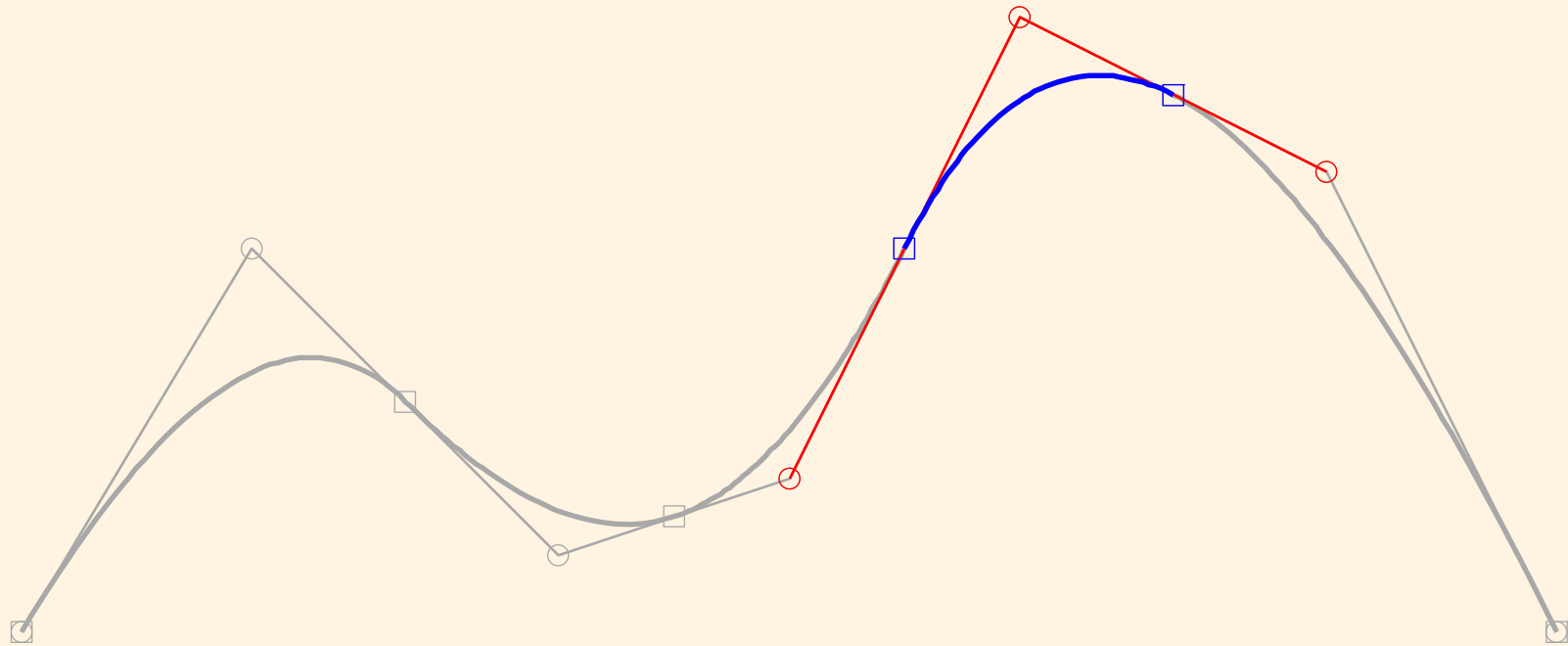


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 3





B-Splines (IIC2-4)

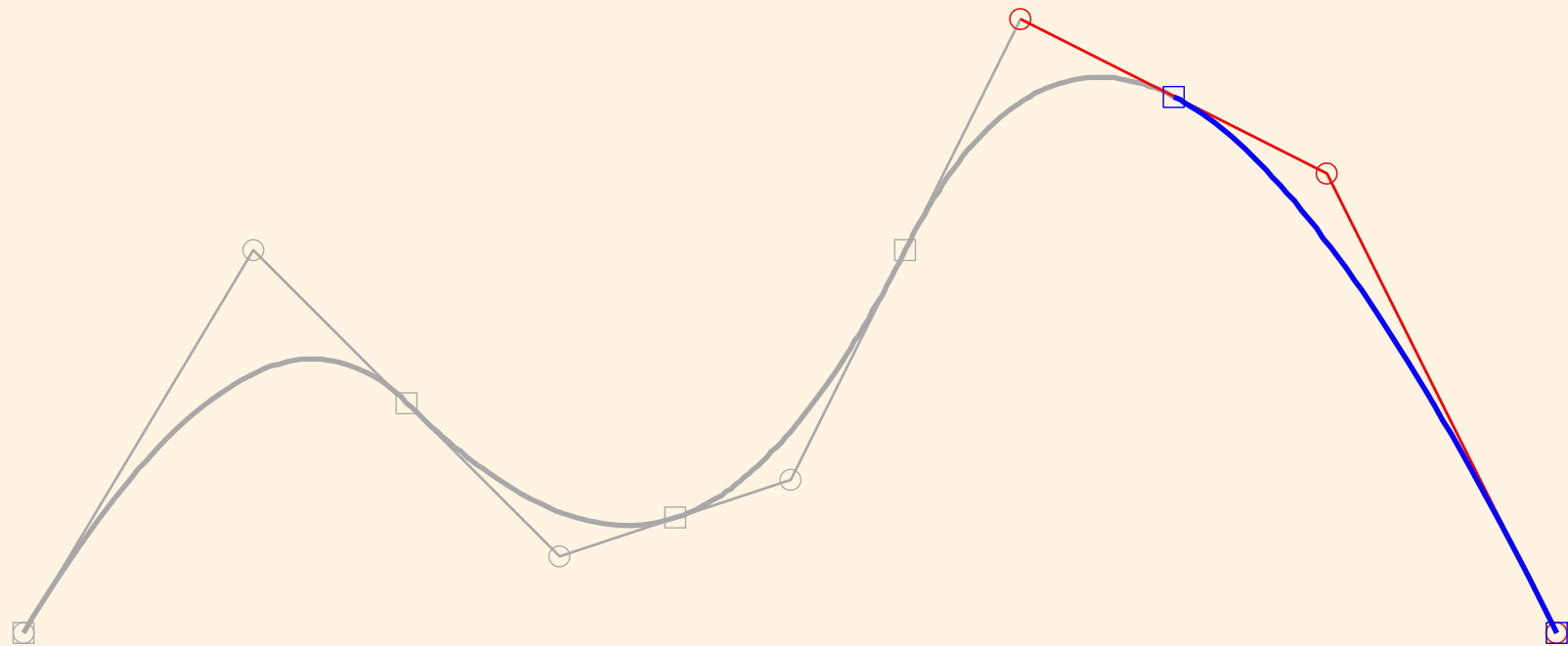


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 4





B-Splines (Ilc2-5)

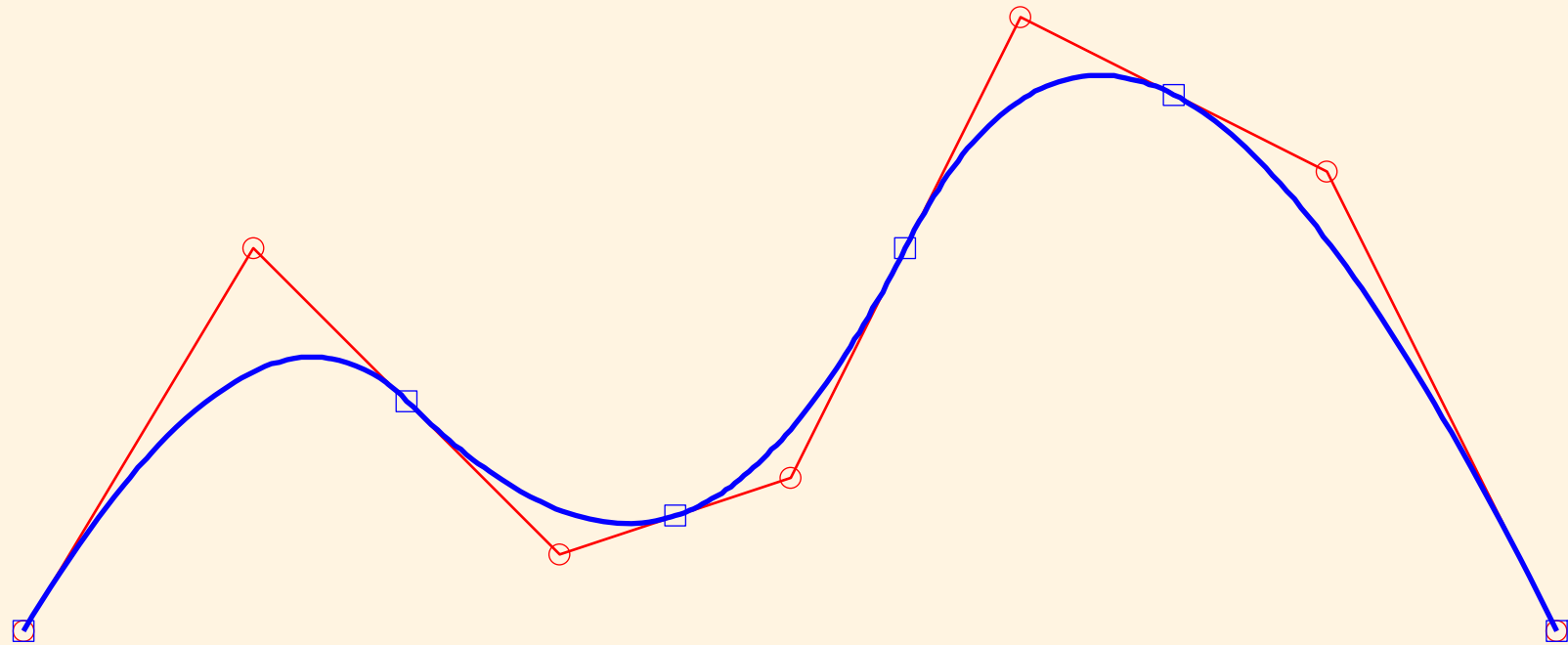


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 5





B-Splines (IIC3)

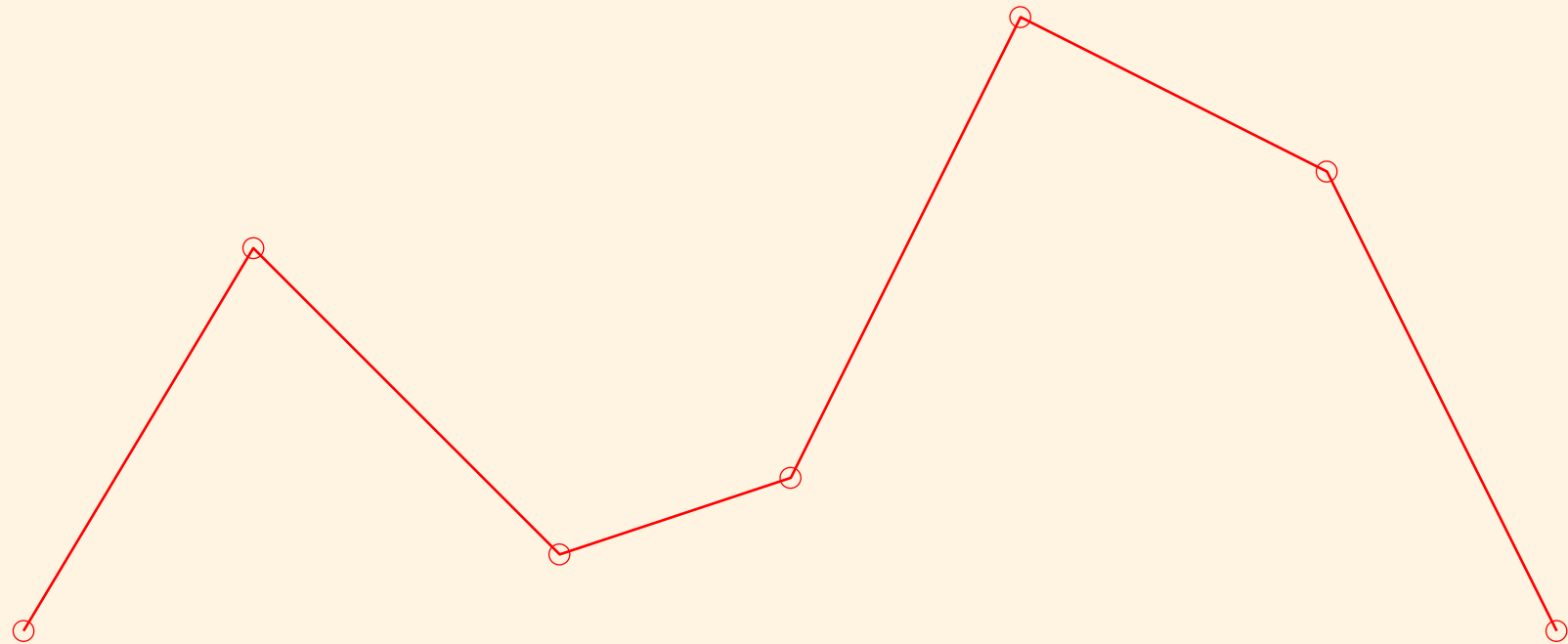


Interp. por B-Splines / ELEM. CUADRÁTICOS DE 3 NODOS: c^1 GEOMETRÍA INTERP.





B-Splines (Ild1-1)

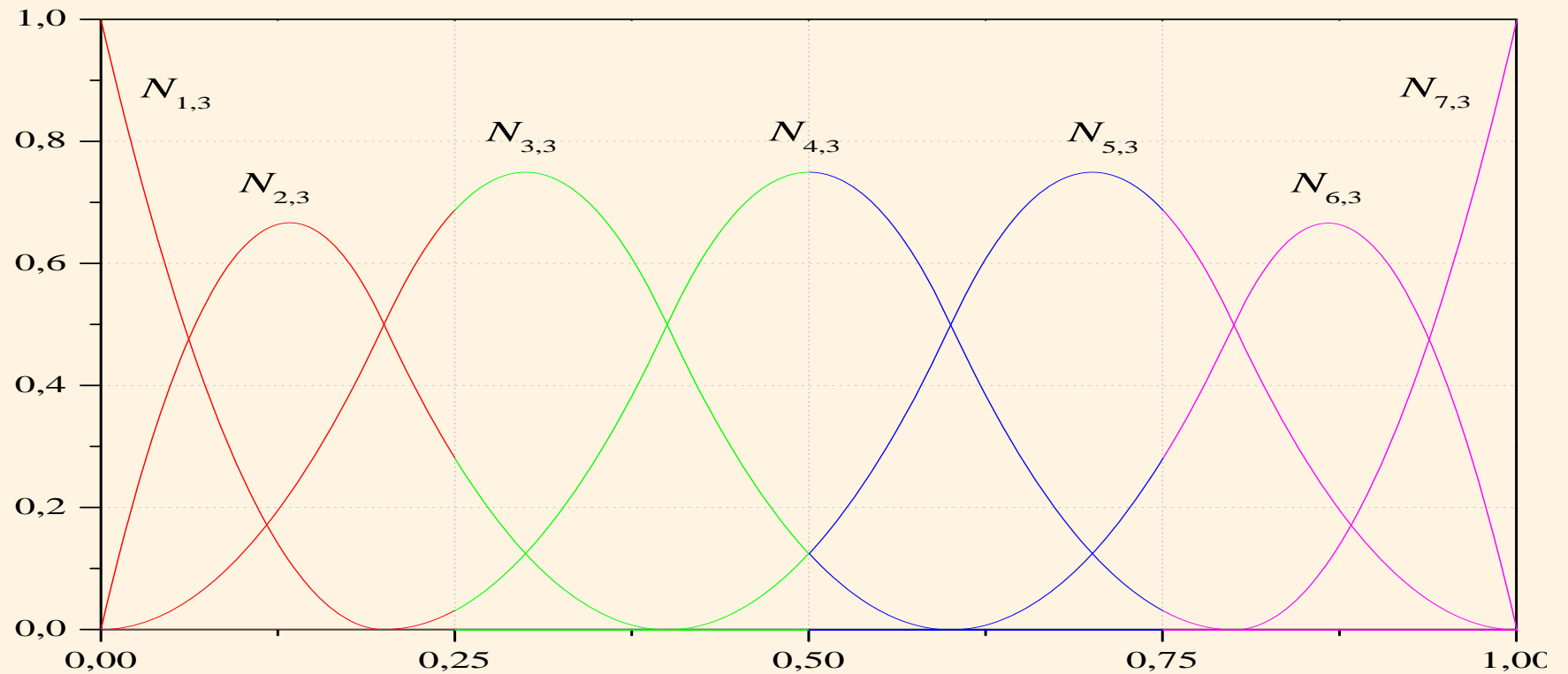


Interp. por B-Splines: PUNTOS DE CONTROL (poligonal)





B-Splines (IId1-2)



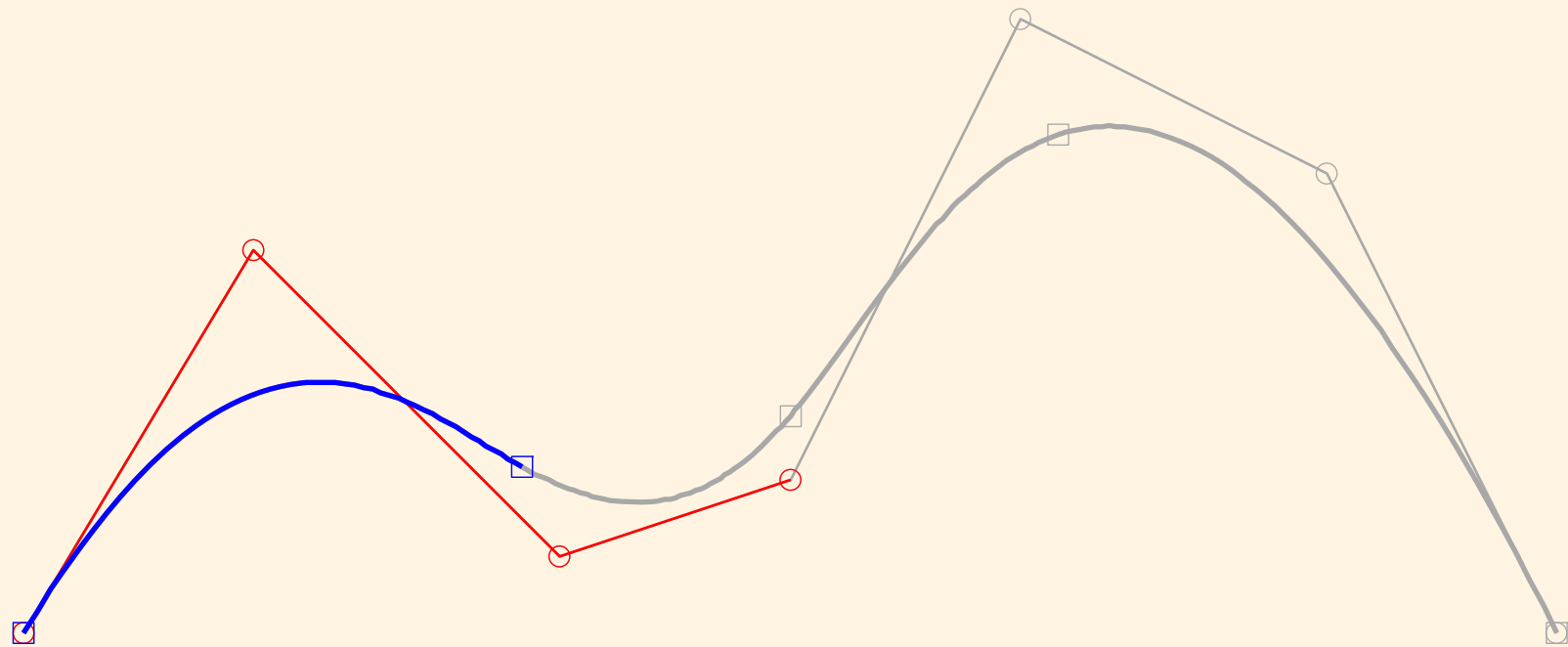
Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: FUNCIONES DE FORMA [LOCALES]

$n = 7, p = 3; \Xi = [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00]$ ← OPEN & UNIFORM





B-Splines (Ild2-1)

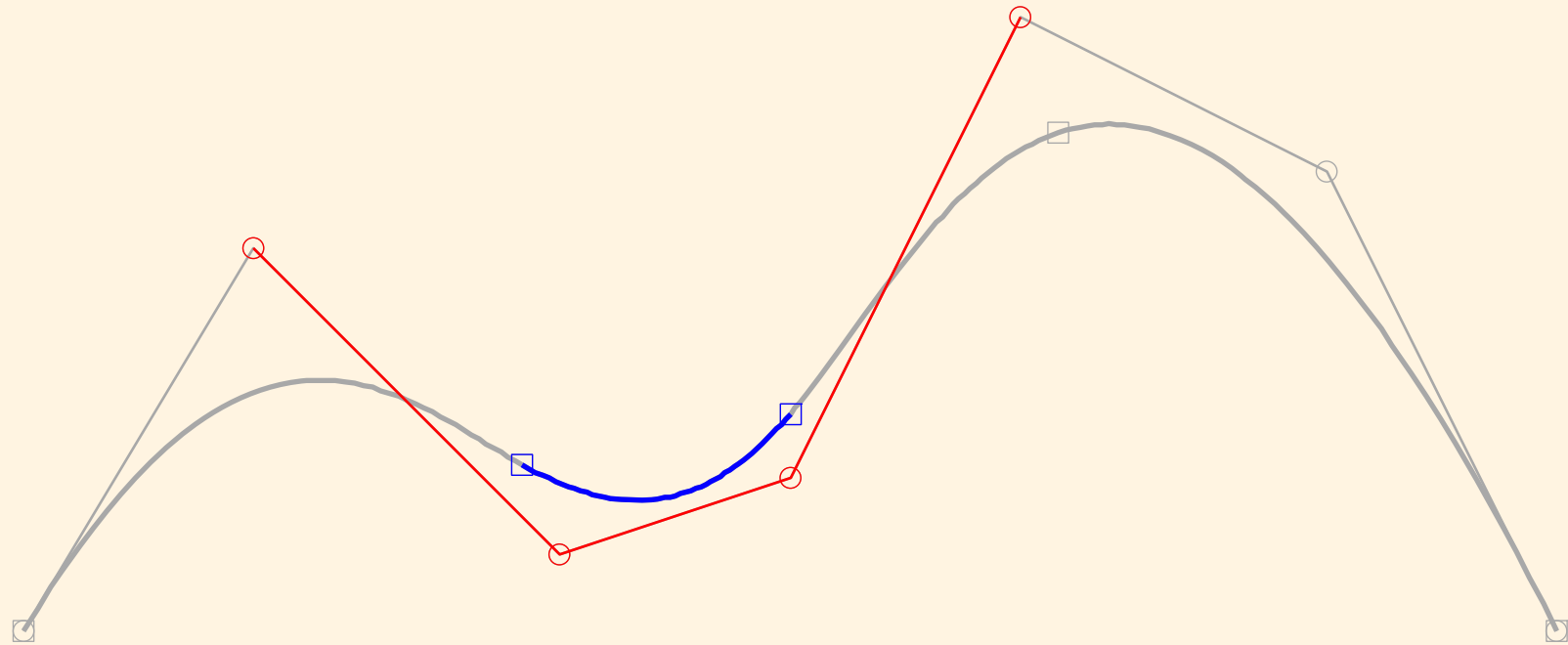


Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: c^2 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 1





B-Splines (Ild2-2)

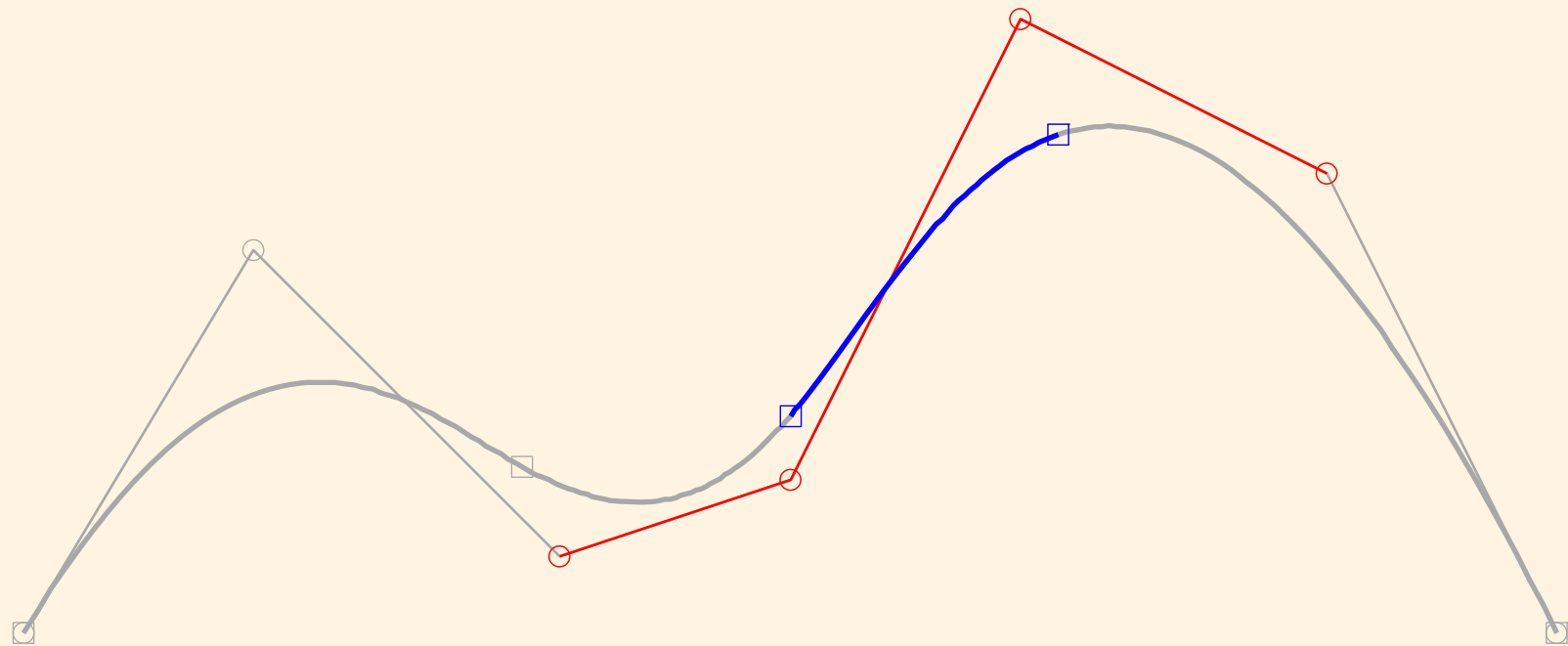


Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: c^2 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 2





B-Splines (Ild2-3)

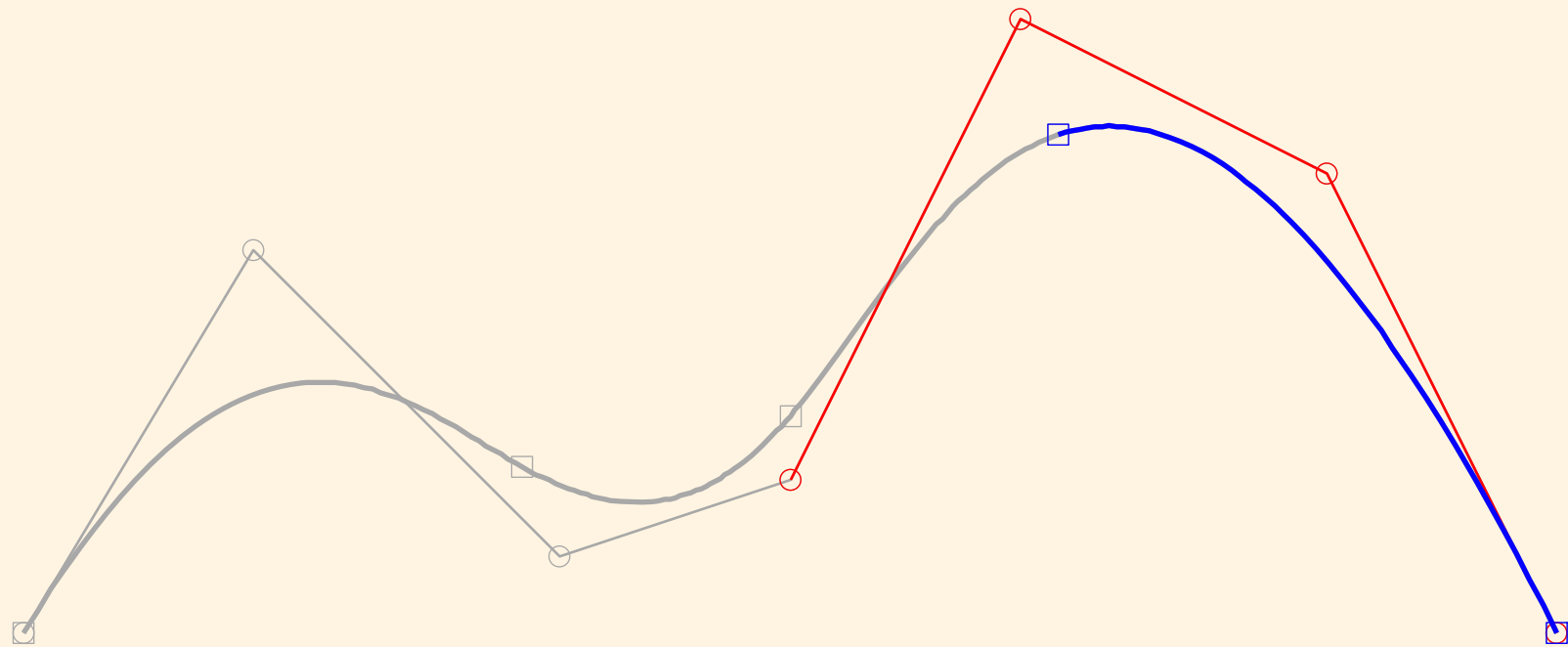


Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: c^2 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 3





B-Splines (IId2-4)

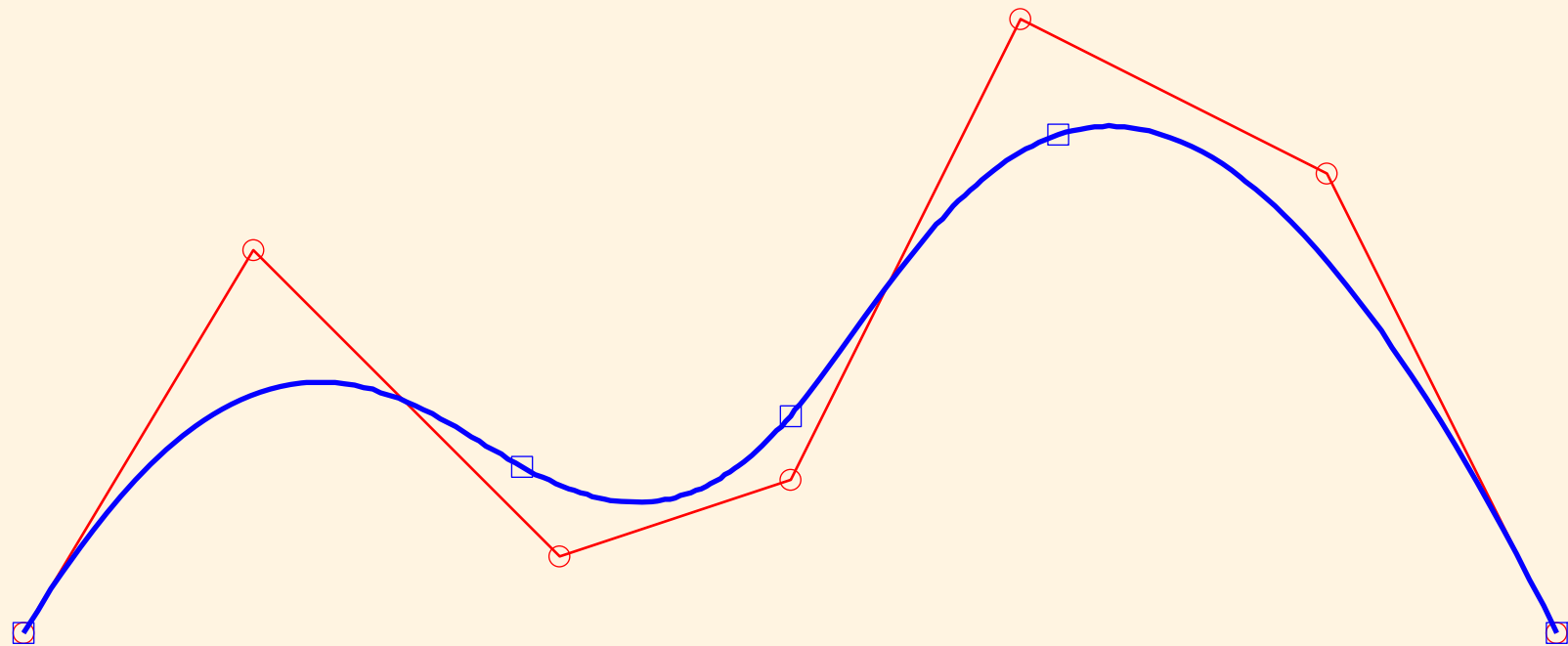


Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: c^2 GEOMETRÍA INTERP. / Elem. # 4





B-Splines (IId3)



Interp. por B-Splines / ELEM. CÚBICOS DE 4 NODOS: c^2 GEOMETRÍA INTERP.





ALGORITMOS DE PIEGL Y TILLER

- ♡ Subrutinas numéricamente estables y totalmente optimizadas para la recurrencia de Cox–De Boor.



NURBS

NURBS (\equiv Non-Uniform Rational B-Splines)

♣ Los NURBS son B-Splines en **coordenadas homogéneas**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r}^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \hat{r}_i, \\ \hat{u}^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \hat{u}_i, \end{array} \right. \quad \xi \in [0, 1]. \quad (*)$$

donde $\hat{r} = \begin{Bmatrix} \lambda \bar{r} \\ \lambda \end{Bmatrix}$ y $\hat{u} = \begin{Bmatrix} \lambda u \\ \lambda \end{Bmatrix}$.

♡ Los **NURBS** representan **EXACTAMENTE** las **CURVAS CÓNICAS!**

(*) Las interp. geométrica y funcional se realizan con las mismas bases (formulación isoparamétrica).





2D & 3D B-SPLINE INTERPOLATION

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{r}}^h(\xi, \eta, \chi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p_\xi}^\xi(\xi) N_{j,p_\eta}^\eta(\eta) N_{k,p_\chi}^\chi(\chi) \bar{\mathbf{r}}_{i,j,k}, \\ u^h(\xi, \eta, \chi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p_\xi}^\xi(\xi) N_{j,p_\eta}^\eta(\eta) N_{k,p_\chi}^\chi(\chi) u_{i,j,k} \end{array} \right. \quad (\xi, \eta, \chi) \in [0, 1]^3.$$

- ♣ Producto tensorial \Rightarrow Topología Rectangular (Patch)
- ♣ Conectar “patches” requiere trabajo adicional.



OSLO KNOT INSERTION

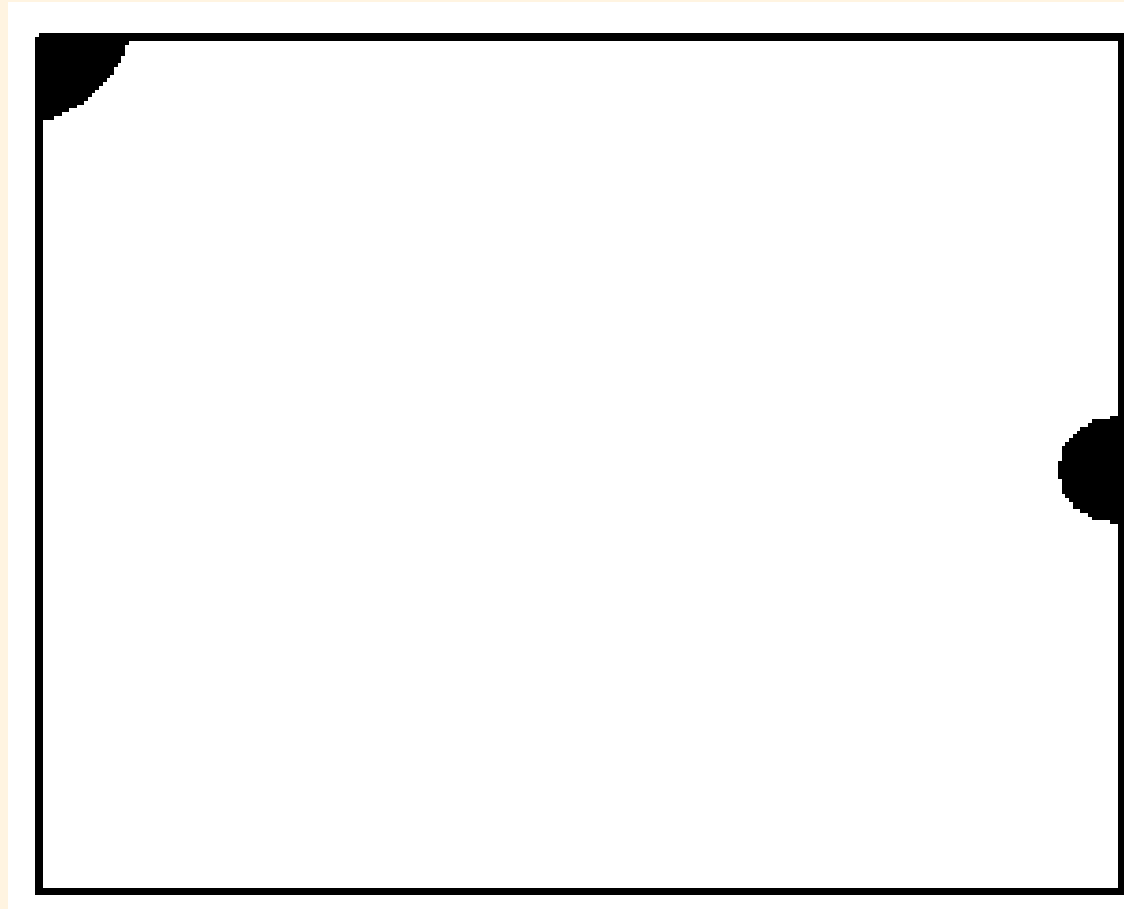
- ♥ Procedimiento simple que permite insertar knots sin cambiar la geometría. (*)
- ◇ Convierte al refinamiento tipo h en una tarea trivial.
- ♣ El refinamiento de malla se puede realizar fácilmente sobre la marcha.
- ♠ En 2D y 3D la inserción de nodos (knots) convierte al refinamiento tipo h en no-local.

(*) **ISOGOMETRÍA**: la interp. funcional se puede refinar sin modificar la geometría.





Refinamiento (Ib)



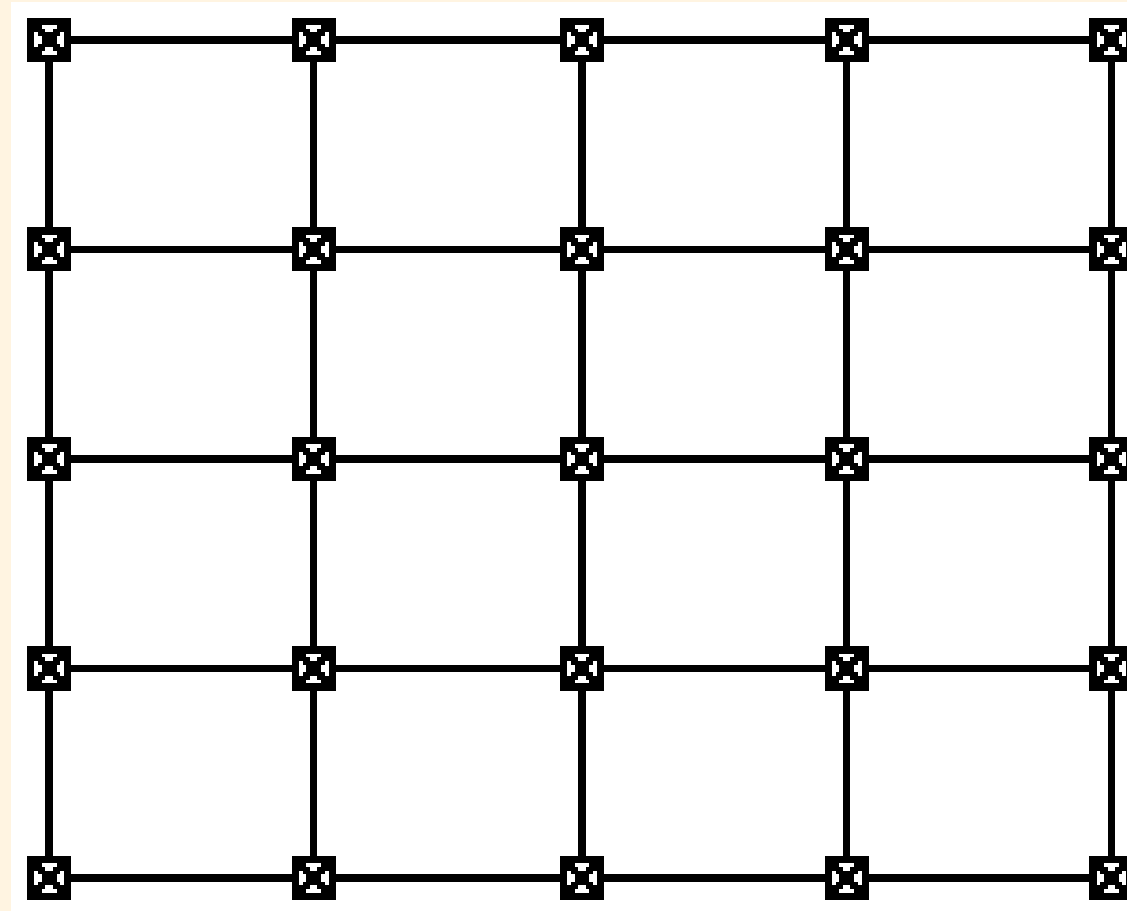
Necesidad de refinamiento local.

M. Dörfel et al., Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T-splines, SIMAI





Refinamiento (Ic)



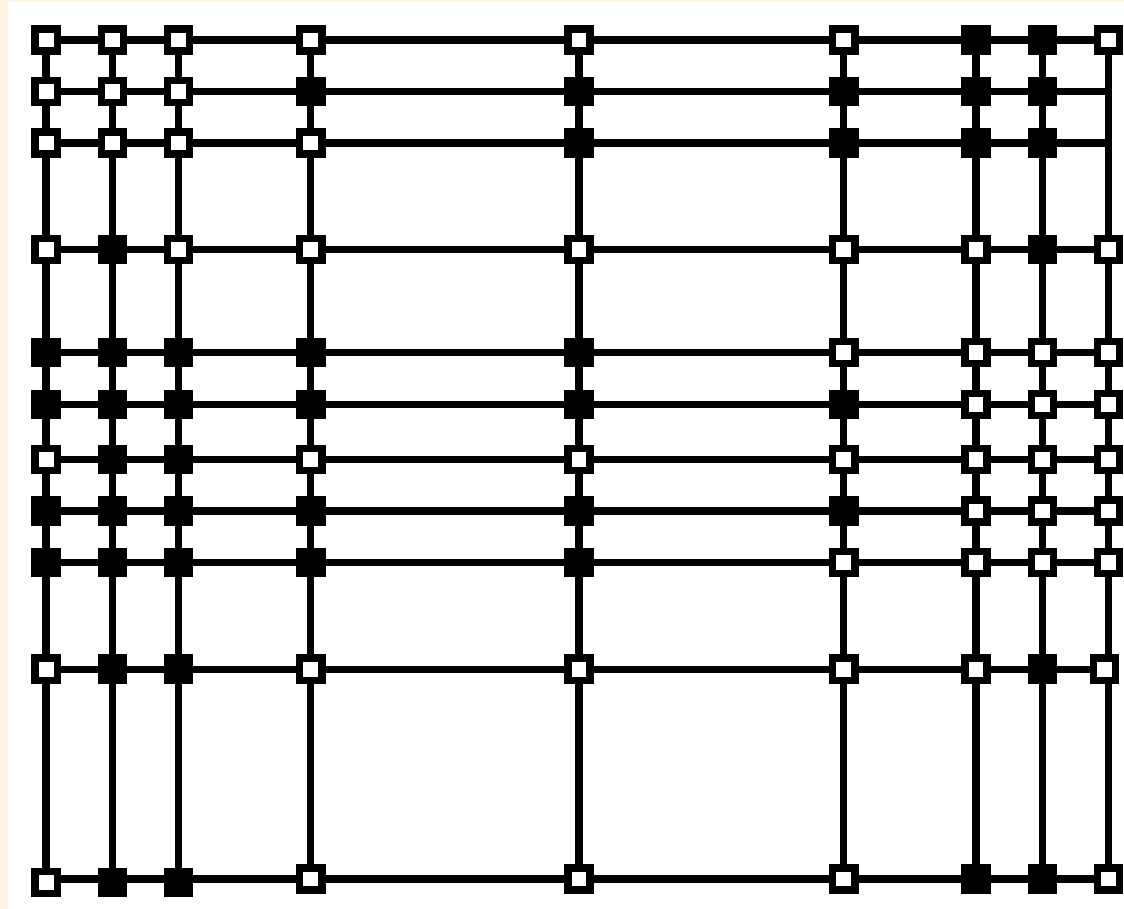
Producto tensorial de B-Splines.

M. Dörfel et al., Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T-splines, SIMAI





Refinamiento (Id)



Efecto global del refinamiento en los productos tensoriales de B-Splines.

M. Dörfel et al., Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T-splines, SIMAI



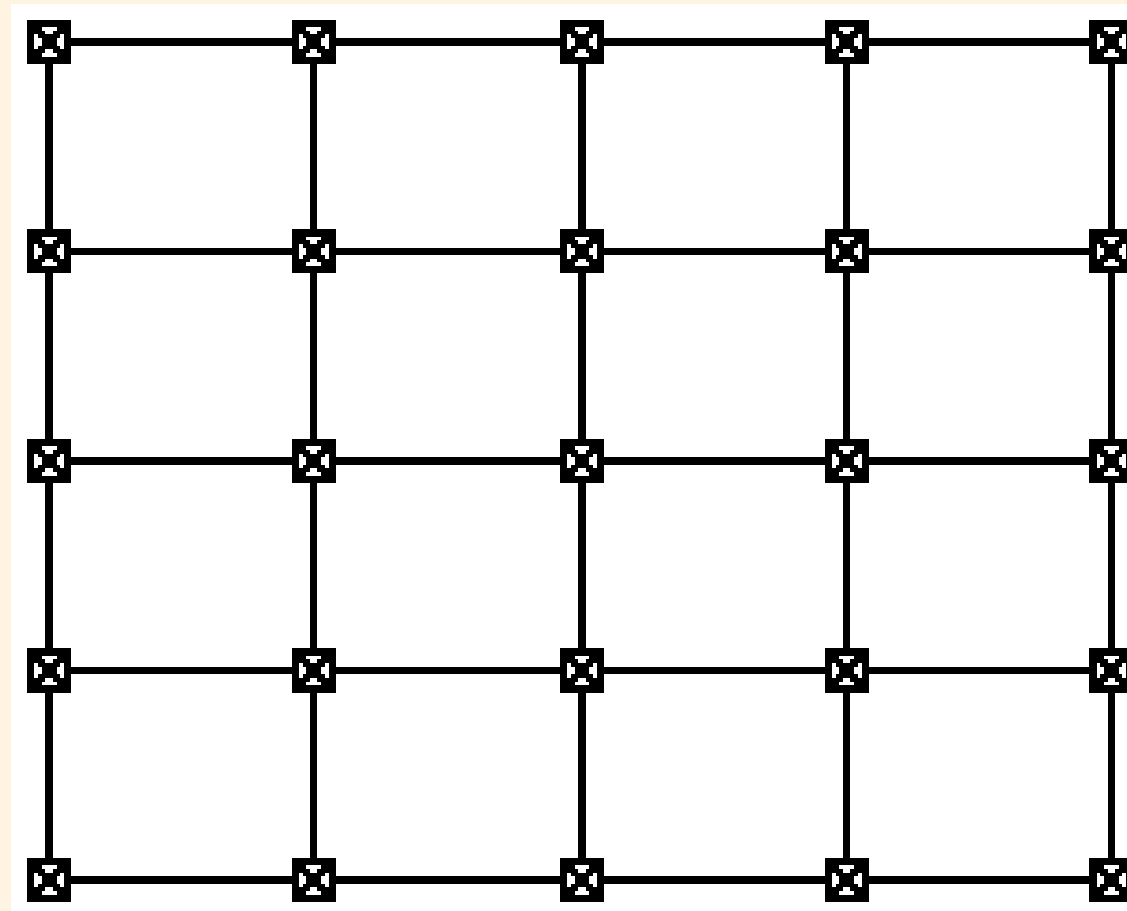


T-SPLINES

- ♥ Idea clave: Puntos T.
- ♥ Permiten topologías no rectangulares.
- ♥ Mantienen la compatibilidad con los NURBS.
- ♥ Extremadamente potentes para diseño.
- ♥ Producen refinamientos tipo h locales en interpolaciones 2D y 3D mediante B-Splines.
- ...
- ♠ Patentados (¿qué significa esto?)
- ♣ No totalmente comprendidos hasta el momento.



T-Splines (Ib)



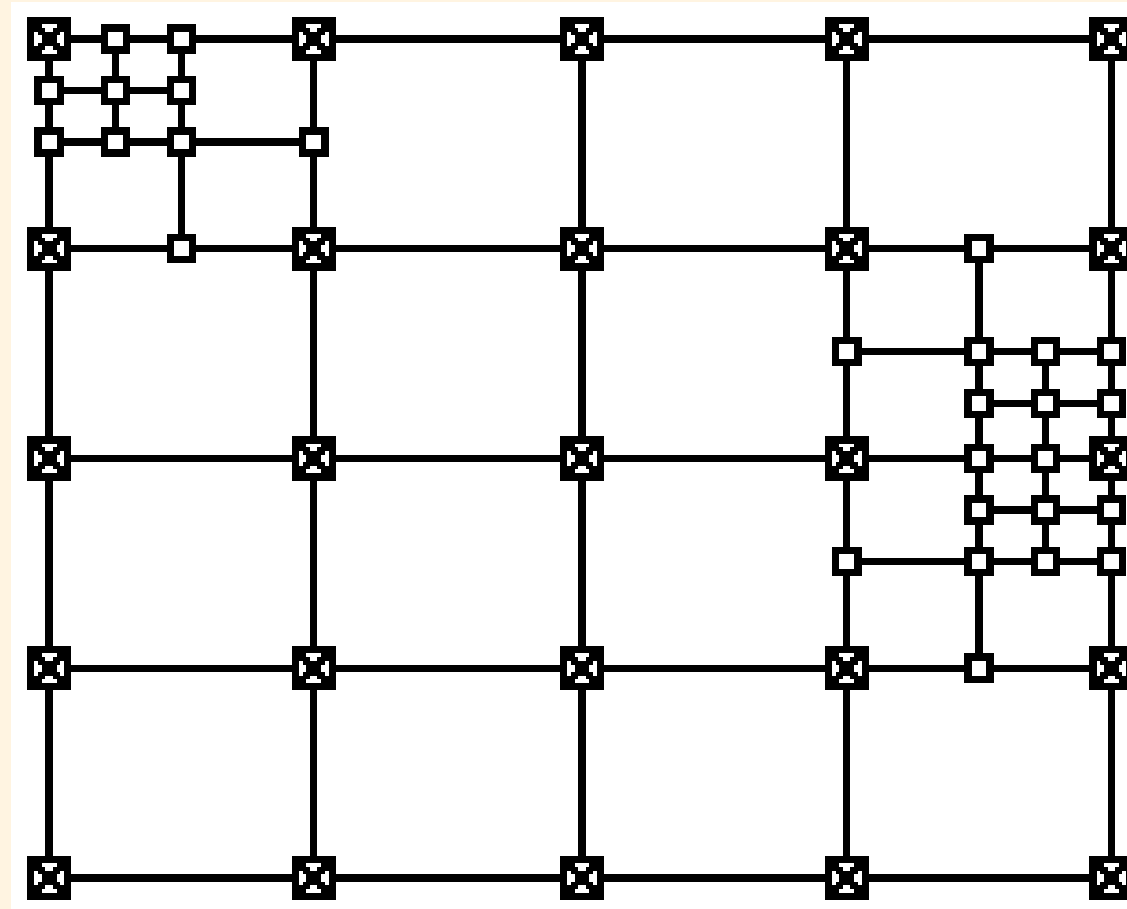
Producto tensorial de B-Splines.

M. Dörfel et al., Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T-splines, SIMAI





T-Splines (VIIc)



Los T-Splines permiten realizar refinamientos locales.

M. Dörfel et al., Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T-splines, SIMAI





ANÁLISIS ISOGEOMÉTRICO

♡ Fácilmente implementable en los programas MEF actuales:

- ♣ Los **ELEMENTOS** se substituyen por **KNOT SPANS**.
- ♣ Los **NODOS** se substituyen por **PUNTOS DE CONTROL**.
- ♣ Las **FUNCIONES DE FORMA** se substituyen por los algoritmos de **PIEGL** y **TILLER**.
- ♣ EL resto no se cambia (misma formulación, organización general del programa, fórmulas de integración, etc.).

♣ Enfoque alternativo: **Extracción de Bézier**



IGA: implementación y posibilidades (Ib)

Ventajas:

- ♣ Los modelos de CAD se podrían analizar directamente (sin generación de malla). (*)
- ♡ El refinamiento de malla es (casi) trivial. La geometría no se modifica en el proceso.
- ♡ La continuidad se puede aumentar arbitrariamente. El coste computacional no crece desmesuradamente a cambio.
- ♡ Mayor capacidad para aproximar comportamientos complejos.
- ◇ ¡Aplicable a problemas de orden superior a 2! (**)

(*) No se ha conseguido completamente, porque los sistemas CAD están diseñados para modelar superficies (principalmente) y no sólidos.

(**) Muy difíciles (en la práctica imposibles) de resolver mediante el MEF



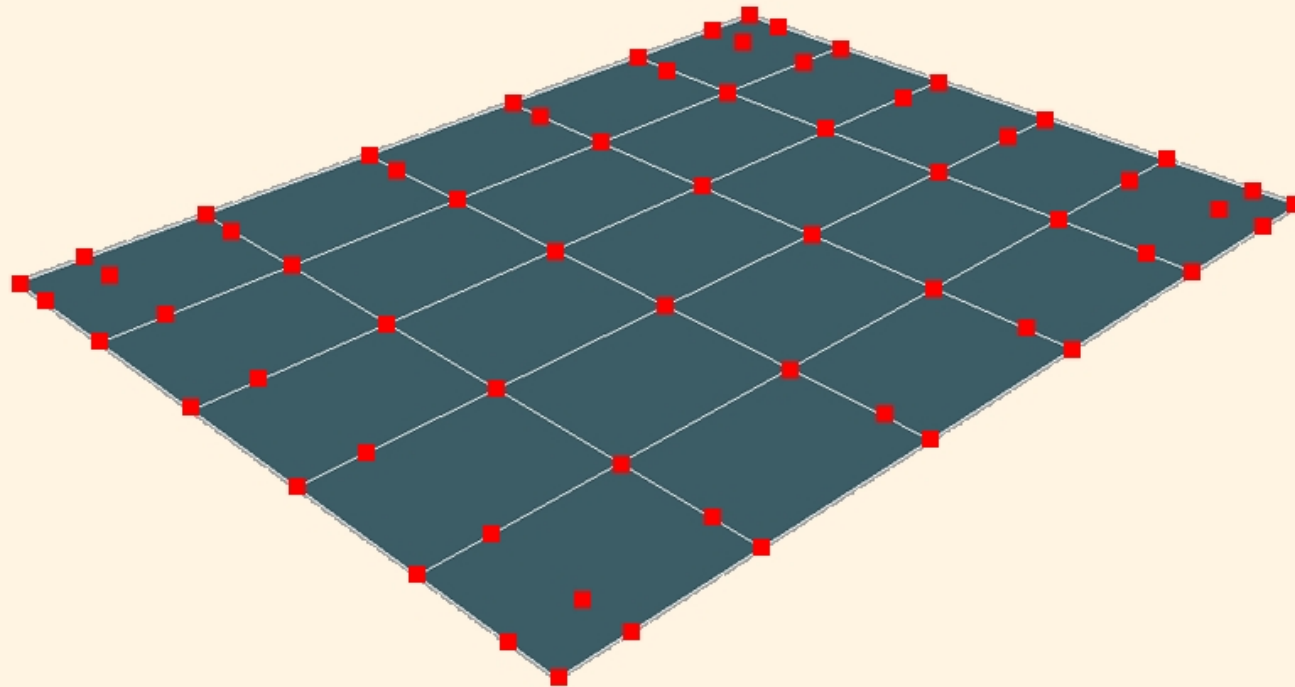


Inconvenientes:

- ♠ Las variables son los valores de control, no los valores nodales.
- ♠ La manipulación de valores nodales no es trivial.
- ♣ El modelado geométrico es menos intuitivo.



IGA: implementación y posibilidades (IIa)

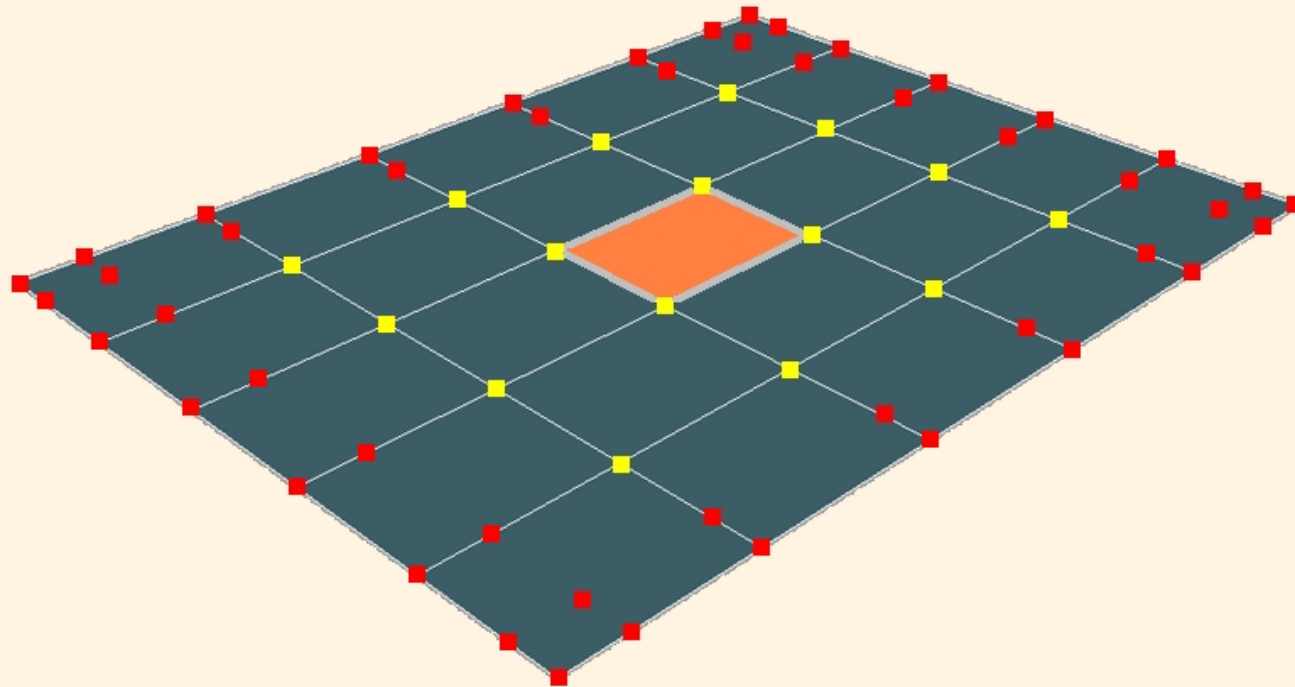


IGA model of a surface: knot spans and control points. Por cortesía de VidealAB <http://videalab.udc.es/>





IGA: implementación y posibilidades (IIb)



IGA model of a surface: concept of ELEMENT. Por cortesía de VidealAB <http://videalab.udc.es/>





Representación de comportamientos complejos mediante mo

- ▶ Efecto producido por el movimiento de los puntos de control (captura de pantalla)

[<Surface-CP.wmv>](#) (*)

- ▶ Efecto producido por el movimiento de los puntos de control (renderizado)

[<Surface.wmv>](#) (*)

(*) Por cortesía de VidealAB <http://videalab.udc.es/>

