CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 7

Transformaciones Integrales de Laplace y Fourier (Curso 2023-2024)

1.– Haciendo uso de la transformación de Laplace, resolver los siguientes problemas de valores iniciales y contorno:

a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \sin \omega t;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0; \quad x > 0 \\ u(0,t) = \alpha;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} u(x,t) = 0;\ t > 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3y^2; \quad x > 0,\ y > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,y) = -y;\ y > 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x};\ x > 0 \\ u(0,t) = \sin t;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} u(x,t) \ \text{ acotada}; \quad t > 0 \end{cases}$$

2.– Considérese una cuerda elástica tensa de longitud L y peso por unidad de longitud λ (constante) sobre la que actúa una fuerza distribuida $f(x,t) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$; $n \in \mathbb{N}$, $0 < x < L$, $t > 0$. Plantear el problema de vibraciones correspondiente sabiendo que la cuerda está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio y que su tensión T puede asumirse constante a lo largo de todo el movimiento. Obtener asimismo la posición $u(x,t)$ de la cuerda en cualquier punto x e instante de tiempo t, para los distintos valores de la frecuencia ω de la fuerza externa aplicada.

3.– Una cuerda perfectamente elástica semiinfinita que se encuentra inicialmente en reposo coincidiendo con la dirección del eje positivo de abscisas, se tensa de modo que el extremo $x = 0$ se mantiene fijo en todo instante de tiempo. A lo largo de la cuerda se aplica transversalmente una fuerza concentrada de magnitud K que se desplaza con velocidad constante v, partiendo del origen de coordenadas. Si se desprecia el peso de la cuerda, la ecuación diferencial que permite obtener el desplazamiento vertical y de cada punto x de la cuerda en cada instante de tiempo t, viene dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - w^2\, \delta\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \qquad c^2 = \frac{\tau_0}{\lambda}, \quad w^2 = \frac{K}{\lambda},$$

siendo λ la masa de la cuerda por unidad de longitud, τ_0 la tensión de la cuerda y δ la "función" delta de Dirac.

Teniendo en cuenta que, dadas las características de este modelo, el desplazamiento de la cuerda en puntos suficientemente alejados será siempre finito (por tanto $y(x,t)$ estará acotada cuando $x \to \infty$), obtener las Transformadas de Laplace de la función $y(x,t)$ cuando

a) la velocidad v de aplicación de la carga es distinta a la d propagación de la onda c, y

b) la velocidad v de aplicación de la carga es igual a la de propagación de la onda c.

Obtener asimismo las expresiones del desplazamiento de la cuerda $y(x,t)$ en los casos **a)** y **b)**, y representar cualitativamente la forma de la cuerda para un instante de tiempo determinado cuando $v < c$, $v = c$ y $v > c$. ¿Tiene sentido físico la solución obtenida?

NOTA: Téngase en cuenta que las *soluciones particulares* de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $z'' - a^2 z = e^{-bx}$, $\quad b > 0$, vienen dadas por $z_p(x) = \dfrac{e^{-bx}}{b^2 - a^2}$ si $b \neq a$, y $z_p(x) = \dfrac{-xe^{-bx}}{b+a}$ si $b = a$.

4.– Se quiere estudiar el comportamiento a torsión de un eje metálico de sección transversal circular y longitud L. Para ello se preparan una serie de ensayos consistentes en mantener uno de los extremos del eje fijo y aplicar en el otro un momento torsor variable, observar las deformaciones angulares que sufre el eje y comparar los resultados con los obtenidos con un modelo de cálculo. Un modelo matemático de este problema físico se puede plantear del siguiente modo: En ausencia de momentos externos aplicados a lo largo del eje y considerando que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones, el ángulo $\theta(x,t)$ girado por cada sección en cada punto x del eje y en cada instante t, satisfacen la ecuación diferencial $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(G(x)J(x)\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) = J(x)\rho(x)\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, siendo $J(x)$ el momento polar de inercia a torsión, $G(x)$ el módulo de elasticidad transversal y $\rho(x)$ la densidad del material. En el caso que nos ocupa las propiedades físicas del material pueden considerarse constantes, el eje tiene sección transversal circular uniforme, un extremo está fijo, en el otro se aplica un momento torsor variable, e inicialmente no hay variaciones angulares de las secciones ni momentos aplicados en ningún punto del eje, por lo que podemos plantear el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad \theta(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < L; \\ \theta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta(L,t)}{\partial x} = \phi(t), \quad t > 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Obtener la solución de este problema en el caso en que $\phi(t) = 1$ por Separación de Variables (denomínese $u(x,t)$ a la función obtenida). Asímismo, y haciendo uso de la Tabla de Transformadas de Laplace, relacionar las transformadas de Laplace de las funciones $u(x,t)$ y $\theta(x,t)$, y obtener una fórmula de Duhamel para calcular los desplazamientos angulares $\theta(x,t)$ a partir $u(x,t)$ y $\phi(t)$.

5.– Resolver mediante transformadas de Fourier los problemas iniciales y de contorno siguientes:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}; \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,u; \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,t) \quad \text{acotada} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty \\ u(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y); \quad 0 \leq y < \infty \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad x > 0, \ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0; \quad x > 0 \\ u(0,y) = y^2(1-y); \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$
