CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 6

Funciones de Green (Curso 2024–2025)

1.– Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$y'' + y = f(x), \quad 0 < x < L; \qquad y(0) = \alpha, \quad y(L) = \beta; \quad L \neq n\pi, \ \ n \in \mathbb{N},$$

para distintas funciones $f(x)$ y distintos valores de α y β. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $f(x)$ y a las constantes α y β, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obteniendo previamente la "función de influencia" o función de Green $G(s, x)$ de la ecuación diferencial, demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)\, G(s, x)\, ds + \frac{\beta \sin(x) - \alpha \sin(x - L)}{\sin L}; \quad L \neq n\pi, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

2.– Obtener la expresión de la solución al problema de contorno

$$y'' = f(x), \quad 0 < x < L; \qquad y(0) = \alpha, \quad y'(L) + c y(L) = \beta; \quad c > 0, \quad L > 0,$$

para distintas funciones $f(x)$ y distintos valores de α y β, en términos de su "función de influencia" o función de Green.

3.– Obtener la función de influencia o "función de Green" $G(x, s)$ que proporciona la flecha de una viga uniforme (de longitud L) en voladizo producida por la aplicación de una carga puntual en un punto s; es decir, resolver el problema de contorno:

$$\begin{aligned} &EI \frac{d^4 G}{dx^4} = \delta(x - s), \qquad 0 < x < L \\ &G(0, s) = 0, \quad G'(0, s) = 0 \\ &G''(L, s) = 0, \quad G'''(L, s) = 0, \end{aligned}$$

siendo E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.

Obtener asímismo la flecha de una viga uniforme en voladizo que soporta una carga distribuida por unidad de longitud igual a $w(x) = K\, x$.

4.– Resolver la ecuación diferencial $\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha})$ mediante su desarrollo en funciones propias en los siguientes casos:

a) En el dominio rectangular $0 < x < L$, $0 < y < H$ con condiciones de contorno $G = 0$ en $x = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial x} = 0$ en $x = L$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 0$ en $y = 0$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 0$ en $y = H$. En la ecuación diferencial $\boldsymbol{x} \equiv (x, y)$ y $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_x, \alpha_y)$.

b) En el dominio semicircular $0 < r < R$, $0 < \theta < \pi$ siendo $G = 0$ en todos los puntos del contorno. En la ecuación diferencial $\boldsymbol{x} \equiv (r, \theta)$ y $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_r, \alpha_\theta)$.

5.– Se desea estudiar la distribución de temperaturas de un barra metálica de sección transversal constante aislada lateralmente dadas distintas distribuciones iniciales de temperaturas, para distintos tipos de aislantes en los extremos de modo que los flujos de calor que fluyen por ellos son variables en función del tiempo, esto es:

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \phi_0(t), \quad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \phi_L(t), \quad t \geq 0; \qquad T(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{gathered} \tag{1}$$

Obtener la función de influencia $N(x,s,t)$ o "función de Neumann", de modo que la solución al problema (1) con condiciones de contorno homogéneas (denomínese $u(x,t)$) se pueda expresar en la forma integral:

$$u(x,t) = \int_0^L f(s)\, N(x,s,t)\, ds.$$

Resolver el problema (1), expresando su solución $T(x,t)$ en forma integral dependiente de la función de Neumann, de $f(x)$ y de $\phi_0(t)$ y $\phi_L(t)$.

(Nota: Las funciones $f(x)$, $\phi_0(t)$ y $\phi_L(t)$ son continuas en los respectivos dominios.)