CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA **PRÁCTICA 5**

E.D.P.: Separación de Variables
Desarrollos en Funciones Propias (Curso 2024–2025)

1.– Resolver los siguientes problemas de valores iniciales y contorno:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2(1-x); \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0; \quad t \ge 0. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\sin^2 x; \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0; \quad t \ge 0. \end{cases}$$

2.– Se desea obtener la distribución de temperaturas $u(x,y)$ en estado estacionario de una placa metálica cuadrada de 1 m^2. Las condiciones de contorno en los cuatro lados de la placa son las siguientes: el contorno $(0,y)$ está aislado, la temperatura del contorno $(1,y)$ es igual a un valor de referencia (que puede tomarse igual a 0), el flujo de calor en el contorno $(x,0)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura en cada punto y la anterior temperatura de referencia (considérese que los valores de las constantes físicas son la unidad, y que por tanto esta condición de contorno es de la forma $u_y(x,0) - u(x,0) = 0$) y la temperatura del contorno $(x,1)$ es conocida (e igual a T_0).

Si no existen fuentes de calor en la placa, el único mecanismo de transferencia de calor es debido a la difusión y la placa puede considerarse isótropa y homogénea, plantear el problema de contorno y obtener la distribución de temperaturas $u(x,y)$.

3.– Un cable uniforme, flexible, de longitud L y densidad lineal constante λ se cuelga verticalmente por uno de sus extremos. Inicialmente, y estando el cable en reposo, se aplica al segmento de cable comprendido entre $x = 0$ (el extremo libre) y $x = \beta L$ ($\beta < 1$) una velocidad horizontal constante v.

a) Asumiendo que las vibraciones que se originan son pequeñas, plantear el problema de contorno que gobierna el movimiento ondulatorio que se produce.

b) Hallar la expresión que proporciona el desplazamiento horizontal de cualquier punto x del cable en un instante t.

4.– Se desea estudiar la distribución de temperaturas $u(x,t)$ a lo largo del tiempo de una barra metálica, de sección transversal constante, con superficie lateral aislada y formada por dos segmentos homogéneos de materiales distintos.

Si la barra se sitúa de forma que su eje coincida con el eje X y se denominan respectivamente a y b a las longitudes de ambos segmentos, de modo que su unión coincida con el origen, las propiedades de los materiales pueden expresarse por:

$$c(x) = \begin{cases} c_1, & -a < x < 0 \\ c_2, & 0 < x < b \end{cases}, \quad k(x) = \begin{cases} k_1, & -a < x < 0 \\ k_2, & 0 < x < b \end{cases}, \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & -a < x < 0 \\ \rho_2, & 0 < x < b \end{cases} \tag{1}$$

siendo $c(x)$ el calor específico, $\rho(x)$ la densidad y $k(x)$ la capacidad calorífica de la barra. Para cada material las propiedades c_1, c_2, k_1, k_2, ρ_1, y ρ_2 son constantes.

En todo momento los extremos de la barra se mantienen a una temperatura de referencia constante, e igual a 0. Asímismo se sabe que inicialmente la distribución de temperaturas es $f(x)$, $-a \le x \le b$, y que no hay fuentes de calor externas.

a) Demostrar que la ecuación diferencial que rige este problema es

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad -a < x < 0,\ 0 < x < b, \quad t > 0. \tag{2}$$

Dar explícitamente las condiciones iniciales y de contorno.

b) Dado que la barra está formada por dos piezas de materiales distintos, donde $c(x)$, $\rho(x)$ y $k(x)$ vienen dadas por (1), la resolución de este problema requerirá plantear dos problemas de contorno distintos. En la unión entre los dos segmentos, ¿qué dos condiciones de compatibilidad deben verificarse? Razonar la respuesta.

c) Aplicando la separación de variables $u(x,t) = \phi(x)T(t)$, demostrar que el problema se puede separar en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, que son:

$$\frac{dT(t)}{dt} - \lambda T = 0, \quad t > 0; \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) - \lambda c(x)\rho(x)\phi(x) = 0, \quad -a < x < 0,\ 0 < x < b. \tag{4}$$

¿Cómo quedan las condiciones de contorno tras la separación de variables? ¿Qué condiciones verifica la función $\phi(x)$ en la unión entre los dos segmentos?

d) Si se considera la función $\phi(x)$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & -a < x < 0 \\ \phi_2(x), & 0 < x < b \end{cases}, \tag{5}$$

demostrar que los dos problemas de contorno que se obtienen de la separación de variables son

$$\begin{cases} \phi_1''(x) - \lambda\alpha_1^2\phi_1(x) = 0, & -a < x < 0; \quad \phi_1(-a) = 0 \\ \phi_2''(x) - \lambda\alpha_2^2\phi_2(x) = 0, & 0 < x < b; \quad \phi_2(b) = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

relacionados por las condiciones en la unión,

$$\phi_1(0) = \phi_2(0)\ ; \qquad k_1\,\phi_1'(0) = k_2\,\phi_2'(0), \tag{7}$$

siendo $\alpha_1^2 = c_1\rho_1/k_1$ y $\alpha_2^2 = c_2\rho_2/k_2$.

e) En general los problemas de contorno (6) con las condiciones (7) solamente admiten funciones propias para valores propios λ negativos ($\lambda_n = -\mu_n^2$, $n = 1, 2, ...$), salvo casos particulares para determinadas relaciones entre las constantes α_1, α_2, k_1, k_2 y la longitud de los dos segmentos que forman la barra.
Dar la expresión que permite obtener explícitamente los valores propios, y demostrar que las funciones propias correspondientes a cada valor propio son:

$$\phi_{1n} = \sin(\mu_n\alpha_1\,(x+a))\ ,\ -a < x < 0; \qquad \phi_{2n} = \sin(\mu_n\alpha_2\,(x-b))\ ,\ 0 < x < b. \tag{8}$$

f) Demostrar a continuación que la distribución de temperaturas $u(x,t)$ viene dada por la serie generalizada de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,\phi_n(x)\,e^{-\mu_n^2\,t}, \tag{9}$$

donde la función $\phi_n(x)$ viene dada por (5), o sea,

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \phi_{1n}(x), & -a < x < 0 \\ \phi_{2n}(x), & 0 < x < b \end{cases}. \tag{10}$$

g) Dar la expresión que permite evaluar los coeficientes u_n de la serie generalizada (9).

5.– Se desea estudiar la distribución estacionaria de temperaturas en el interior de una esfera homogénea de radio R, centrada en el origen de coordenadas, conocida la distribución de temperaturas en su superficie.

a) Plantear la ecuación diferencial en coordenadas esféricas que proporciona la temperatura $u(r, \theta, \phi)$, siendo r el radio ($0 \leq r < R$), θ la latitud ($0 \leq \theta \leq \pi$) y ϕ la longitud ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$), sabiendo que la distribución de temperaturas en la superficie de la esfera es una función conocida de θ, esto es, $u(R, \theta, \phi) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \forall \phi$.

b) Demostrar que la separación de variables $\Psi(r)\,\Theta(\theta)$ proporciona las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\textbf{b.1)} \qquad \Theta'' + \cot\text{an}(\theta)\,\Theta' + \lambda\Theta = 0$$

$$\textbf{b.2)} \qquad r^2\Psi'' + 2r\Psi' - \lambda\Psi = 0$$

c) Efectuando el cambio de variable $\xi = \cos\theta$ y denominando $G(\xi) = \Theta(\text{arccos}\xi)$, demostrar que la ecuación **b.1)** puede transformarse en la ecuación de Legendre:

$$[(1 - \xi^2)G'(\xi)]' + \lambda G(\xi) = 0.$$

Esta ecuación diferencial tiene soluciones no triviales en el intervalo $[-1, 1]$ para los valores propios $\lambda_n = n(n+1)$, siendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Las funciones propias correspondientes a cada valor λ_n son los "Polinomios de Legendre" de grado n: $P_n(\xi)$, que pueden generarse mediante la expresión recurrente:

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi); \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.$$

d) Resolver la ecuación diferencial **b.2)**, teniendo en cuenta que $\lambda_n = n(n+1)$, y plantear la solución como una serie de polinomios de Legendre.

e) Los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal de funciones que, entre otras propiedades, verifican la relación:

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} P_n^2(\xi)d\xi = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} P_{n-1}^2(\xi)d\xi.$$

Haciendo uso de esta expresión, obtener la solución final $u(r, \theta, \phi)$ en términos de los polinomios de Legendre y de la función $f(\theta)$.

6.– Obtener las vibraciones longitudinales de una barra cuyos extremos están fijos elásticamente con idénticos coeficientes de rigidez en ambas sujeciones. Las condiciones iniciales vienen dadas por dos funciones conocidas f y g. Esto es, resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + hu(L,t) = 0; \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq L.$$

7.– Se desea estudiar la variación a lo largo del tiempo de la posición en el eje vertical u de una membrana circular de radio a que se encuentra apoyada en un marco rígido horizontal en todo instante de tiempo. La fricción a la que está sometida la membrana durante su movimiento vibratorio puede considerarse proporcional según una constante positiva a la velocidad vertical de la membrana en cada punto.

En estas condiciones, y si las condiciones iniciales únicamente dependen de la coordenada radial, el problema planteado tiene simetría angular por lo que, si se asume que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones y que, por tanto, solamente se producen desplazamientos en el plano vertical y si no se considera el peso de la membrana, se puede escribir en términos de la ecuación diferencial y las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - h \frac{\partial u}{\partial t}, \quad r < a, \ \ t > 0;$$
$$u(a,t) = 0; \quad t \geq 0; u(r,0) = f(r), \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g(r); \qquad r \leq a;$$

siendo r la coordenada radial, t el tiempo y c la velocidad característica de propagación de una onda en la membrana.

Obtener los desplazamientos de la membrana $u(r,t)$, si $h < 4c/a$.

(Nota: Las primeras raíces positivas de $J_0(x)$ son: 2.40482556043592, 5.52007810562151, 8.65372791287264, 11.79153443900112, 14.93091770846310,...)

8.– Un fluido incompresible se encuentra inicialmente en reposo en el interior de una tubería circular de radio R y longitud L. En un determinado instante se aplica un gradiente de presión Δp. En condiciones de flujo laminar, la velocidad $v(r,t)$ en cualquier posición radial r e instante t satisface la ecuación diferencial

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p}{L}, \qquad 0 < r < R, \quad t > 0,$$

siendo ρ la densidad y μ la viscosidad del fluido.

Teniendo en cuenta que la velocidad v es finita en el centro del tubo ($r = 0$) en cualquier instante de tiempo, y que en el contorno ($r = R$) la velocidad v debe ser nula para que no se produzca deslizamiento de la lámina de fluido en contacto con la pared, se pide obtener la expresión de la velocidad $v(r,t)$ para cualquier posición radial r e instante de tiempo t.

9.– Unas bolas esféricas de combustible de radio R generan una cantidad de calor constante Q por unidad de volumen y unidad de tiempo. A la vez, su contorno es enfriado por un fluido refrigerante, de modo que el flujo en el contorno es proporcional —según una constante h que mide la transferencia de calor combustible/fluido— a la diferencia entre la temperatura en el contorno y la temperatura del fluido —asumida constante e igual a T_F—.

Si se denomina k a la conductividad térmica del combustible, ρ a su densidad y C_p a su capacidad calorífica (asumidas constantes), la distribución de la temperatura $T(r,t)$ en una de las esferas en cualquier punto radial r e instante t satisface el problema de contorno

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{Q}{\rho C_p}, \quad 0 < r < R, \quad t > 0;$$
$$\frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = -\frac{h}{k} \left(T(R,t) - T_F \right), \quad t \geq 0;$$
$$T(r,0) = T_0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

siendo T_0 (constante) la distribución inicial de temperaturas en la esfera. Resolver el problema de contorno anterior y obtener la distribución de temperaturas $T(r,t)$.

10.– Se desea estudiar el problema de vibraciones forzadas de una cuerda tensada sometida a un desplazamiento inicial conocido, y a una fuerza que actúa a lo largo de toda su longitud y que depende del tiempo. Un modelo matemático sencillo de este fenómeno, en el que no se tiene en cuenta efectos de fricción, vendría dado por la ecuación de ondas con las condiciones iniciales y de contorno siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t), \quad 0 < x < L;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad 0 \leq x \leq L.$$

Obtener la expresión de los desplazamientos verticales de la cuerda en cualquier instante de tiempo mediante el desarrollo en funciones propias del problema homogéneo, siendo $Q(x,t) = g(x)\cos\omega t$. ¿Para qué valores de la frecuencia ω se produce resonancia en el sistema?

11.– La distribución de los niveles de voltaje $V(x,t)$ de la corriente eléctrica que circula por un cable fino de longitud L con autoinducción y conductancia a tierra despreciables se puede modelizar en términos de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0; \qquad k = \frac{1}{RC},$$

siendo R y C la resistencia eléctrica y la capacitancia del cable por unidad de longitud.

Obtener la expresión del potencial V a lo largo del tiempo y en cualquier punto del cable, si en el extremo $x = 0$ se aplica un voltaje variable con el tiempo, e igual a $V(0,t) = \sin t$, y en el extremo $x = L$ el voltaje es nulo. Inicialmente, el potencial en todos los puntos del cable es conocido y viene dado por $V(x,0) = \sin x$.

12.– Se desea estudiar la variación a lo largo del tiempo de los desplazamientos en el plano vertical $v(x,t)$ de una viga uniforme biapoyada, de sección transversal constante y longitud L, que se encuentra sometida a una carga externa distribuida variable $W(x,t)$ (incluye también el peso propio). Si se asume que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones y que, por tanto, solamente se producen desplazamientos en el plano vertical, este problema se puede plantear en términos de la ecuación diferencial y las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b^2\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = W(x,t), \quad 0 < x < L, \;\; t > 0; \\
v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0; \\
v(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = g(x); \qquad 0 \le x \le L;
\end{gathered} \tag{1}$$

siendo $b^2 = \frac{gEI}{A\rho}$, donde g es aceleración de la gravedad, E el módulo de elasticidad, I el momento de inercia, A el área de la sección transversal y ρ el peso por unidad de volumen (se asume que todas estas magnitudes son constantes). Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas y corresponden respectivamente a los desplazamientos y a las velocidades iniciales de los puntos de la viga.

a) Demostrar, en primer lugar, que si las funciones $r(x)$ y $p(x)$ son funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y $q(x)$ es continua en (a,b), entonces el conjunto de las funciones no triviales $y_i(x)$ con terceras derivadas continuas que verifican el siguiente problema de contorno, para distintos valores de los parámetros $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dx^2}\left[r\,\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right] + (q + \lambda_i\,p)y_i = 0, \qquad x \in [a,b]; \\
a_1\,y_i\big|_{x=a} - \alpha_1\,(r\,y_i'')'\big|_{x=a} = 0, \qquad a_2\,y_i'\big|_{x=a} - \alpha_2\,(r\,y_i'')\big|_{x=a} = 0; \\
b_1\,y_i\big|_{x=b} - \beta_1\,(r\,y_i'')'\big|_{x=b} = 0, \qquad b_2\,y_i'\big|_{x=b} - \beta_2\,(r\,y_i'')\big|_{x=b} = 0;
\end{gathered} \tag{2}$$

forman un conjunto de funciones ortogonales con respecto a la función de peso $p(x)$ en el intervalo (a,b). (Los pares de coeficientes a_j y α_j, $j = 1,2$, del problema (2) no pueden ser simultáneamente nulos —ni tampoco los pares de coeficientes b_j y β_j—).

b) De acuerdo con el enunciado del teorema anterior resolver el problema de contorno (1), es decir obtener los desplazamientos de una viga biapoyada si la carga externa es una función conocida $W(x,t)$.
