

- 1.– Resolver el problema de valores iniciales para una onda unidireccional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad u(x, t = 0) = F(x),$$

siendo c una constante real y $f(x, t)$, $F(x)$ funciones conocidas.

- 2.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales para una onda unidireccional amortiguada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0, \quad u(x, t = 0) = F(x)$$

siendo c, λ constantes reales y $F(x)$ una función conocida.

- 3.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

Obtener asimismo la solución $v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ del siguiente problema de valores iniciales en \mathbb{R}^n , que constituye el caso general del problema planteado anteriormente

$$\sum_{k=1}^n \left(c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0; \quad v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

siendo c_k constantes reales no nulas.

- 4.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales correspondiente a las vibraciones de una cuerda de longitud suficientemente larga:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < x < -a \\ h(1-x^2/c^2) & ; -a < x < +a \\ 0 & ; +a < x < +\infty \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, dibujar de forma cualitativa las rectas características en el plano (x, t) , y obtener las expresiones cuantitativas del perfil de la cuerda $u(x, t)$ para valores de $t > 0$ cuando ésta se deja vibrar libremente.

- 5.– Considérese la ecuación de primer orden cuasilineal $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, donde el flujo viene dado por $q(u) = u^2/2$. Resolver los problemas de valores iniciales formados por esta ecuación diferencial parcial y las condiciones iniciales:

$$\mathbf{a)} \quad u(x, t = 0) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x/\alpha; & 0 < x < \alpha \\ 1; & x \geq \alpha \end{cases} \quad \mathbf{b)} \quad u(x, t = 0) = \begin{cases} 1; & x \leq -1 \\ -x; & -1 < x < 0 \\ 0; & x \geq 0 \end{cases}$$

- 6.— Obtener, por el método de las características, la solución $u(x, y, z)$ del siguiente problema de valores iniciales caracterizado por una ecuación diferencial de primer orden cuasilínea:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = u^2, \quad u(x, y, 0) = x + y.$$

-
- 7.— Las ecuaciones unidimensionales de Euler de flujo isentrópico de un fluido vienen dadas, en la hipótesis de que la presión sea constante, por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; & u(x, t = 0) &= f(x) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0; & \rho(x, t = 0) &= g(x) \end{aligned}$$

Obtener las expresiones generales de la velocidad u y la densidad ρ del fluido en cualquier punto x y en cualquier instante de tiempo t .

-
- 8.— Resolver el problema de valores iniciales siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = x, \quad u(x, 0) = f(x)$$

y obtener la solución en forma paramétrica $u(s, \tau)$, dando las expresiones explícitas de $x(s, \tau)$ y de $t(s, \tau)$.

Obtener asimismo la solución $u(x, t)$ cuando $f(x) = 1$ y $f(x) = x$.

-
- 9.— Un modelo matemático sencillo del tráfico de vehículos por una carretera congestionada se puede expresar en términos de una ecuación diferencial de primer orden no lineal. Así, si se denomina $\rho(x, t)$ a la *densidad de tráfico* (número de coches por kilómetro en un instante de tiempo t y en un punto x) y $q(x, t)$ a la *intensidad de tráfico* (número de vehículos por hora que pasan por un punto x en un instante t), y se considera que en la zona de estudio el número de carriles de circulación de la carretera no varía, y no hay incorporaciones ni salidas en ese tramo, se verifica $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$. La densidad de tráfico y la intensidad están relacionadas a través de la velocidad de circulación de los vehículos u , de modo que $q = \rho u$. En el caso que nos ocupa, se sabe que la velocidad de avance es función de la densidad de la siguiente forma: $u(\rho) = u_{max} (1 - \rho/\rho_{max})$ siendo u_{max} y ρ_{max} valores constantes y conocidos.

Obtener la densidad de tráfico ρ y la velocidad de avance u cuando los vehículos están parados en un semáforo en rojo y éste cambia a verde, lo que en términos matemáticos se puede representar cuando la densidad de tráfico inicial viene dada por $\rho(x, 0) = \rho_{max}$ si $x < 0$, y $\rho(x, 0) = 0$ si $x > 0$.
