CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 4

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden (Curso 2023–2024)

1.– Resolver el problema de valores iniciales para una onda unidireccional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \qquad u(x,t=0) = F(x),$$

siendo c una constante real y $f(x,t)$, $F(x)$ funciones conocidas.

2.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales para una onda unidireccional amortiguada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0, \qquad u(x,t=0) = F(x)$$

siendo c, λ constantes reales y $F(x)$ una función conocida.

3.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u(x,y,0) = f(x,y)$$

Obtener asímismo la solución $v(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ del siguiente problema de valores iniciales en $\mathbb{R}^n$, que constituye el caso general del problema planteado anteriormente

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0; \quad v(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

siendo c_k constantes reales no nulas.

4.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales correspondiente a las vibraciones de una cuerda de longitud suficientemente larga:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad u(x,0) = \begin{cases} 0 & ; \ -\infty < x < -a \\ h(1-x^2/c^2) & ; \ -a < x < +a \\ 0 & ; \ +a < x < +\infty \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, dibujar de forma cualitativa las rectas características en el plano (x,t), y obtener las expresiones cuantitativas del perfil de la cuerda $u(x,t)$ para valores de $t > 0$ cuando ésta se deja vibrar libremente.

5.– Considérese la ecuación de primer orden cuasilineal $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, donde el flujo viene dado por $q(u) = u^2/2$. Resolver los problemas de valores iniciales formados por esta ecuación diferencial parcial y las condiciones iniciales:

a) $u(x,t=0) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x/\alpha; & 0 < x < \alpha \\ 1; & x \geq \alpha \end{cases}$ **b)** $u(x,t=0) = \begin{cases} 1; & x \leq -1 \\ -x; & -1 < x < 0 \\ 0; & x \geq 0 \end{cases}$

6.– Obtener, por el método de las características, la solución $u(x, y, z)$ del siguiente problema de valores iniciales caracterizado por una ecuación diferencial de primer orden cuasilineal:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = u^2, \qquad u(x, y, 0) = x + y.$$

7.– Las ecuaciones unidimensionales de Euler de flujo isentrópico de un fluido vienen dadas, en la hipótesis de que la presión sea constante, por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \quad u(x, t = 0) = f(x) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0; \quad \rho(x, t = 0) = g(x) \end{aligned}$$

Obtener las expresiones generales de la velocidad u y la densidad ρ del fluido en cualquier punto x y en cualquier instante de tiempo t.

8.– Resolver el problema de valores iniciales siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = x, \qquad u(x, 0) = f(x)$$

y obtener la solución en forma paramétrica $u(s, \tau)$, dando las expresiones explícitas de $x(s, \tau)$ y de $t(s, \tau)$.

Obtener asímismo la solución $u(x, t)$ cuando $f(x) = 1$ y $f(x) = x$.

9.– Un modelo matemático sencillo del tráfico de vehículos por una carretera congestionada se puede expresar en términos de una ecuación diferencial de primer orden no lineal. Así, si se denomina $\rho(x, t)$ a la *densidad de tráfico* (número de coches por kilómetro en un instante de tiempo t y en un punto x) y $q(x, t)$ a la *intensidad de tráfico* (número de vehículos por hora que pasan por un punto x en un instante t), y se considera que en la zona de estudio el número de carriles de circulación de la carretera no varía, y no hay incorporaciones ni salidas en ese tramo, se verifica $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$. La densidad de tráfico y la intensidad están relacionadas a través de la velocidad de circulación de los vehículos u, de modo que $q = \rho\, u$. En el caso que nos ocupa, se sabe que la velocidad de avance es función de la densidad de la siguiente forma: $u(\rho) = u_{max}\,(1 - \rho/\rho_{max})$ siendo u_{max} y ρ_{max} valores constantes y conocidos.

Obtener la densidad de tráfico ρ y la velocidad de avance u cuando los vehículos están parados en un semáforo en rojo y éste cambia a verde, lo que en términos matemáticos se puede representar cuando la densidad de tráfico inicial viene dada por $\rho(x, 0) = \rho_{max}$ si $x < 0$, y $\rho(x, 0) = 0$ si $x > 0$.
