CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 3

Clasificación de EDP de Segundo Orden (Curso 2024-2025)

1.– Determinar los dominios en los cuales las siguientes ecuaciones son hiperbólicas, parabólicas o elípticas y reducirlas a las respectivas formas canónicas, previa obtención de las ecuaciones y curvas características:

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

d) $\sin^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(2x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} + \cos^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x$

2.– Considérese la ecuación diferencial: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Se pide:

a) Determinar los dominios en los que esta ecuación es hiperbólica, parabólica o elíptica.

b) Obtener, en cada caso, las ecuaciones y curvas características y reducir la ecuación a las correspondientes formas canónicas.

c) Obtener la solución general de la ecuación diferencial en el caso que sea hiperbólica.

3.– Obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

b) $r\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda^2 r\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\lambda^2\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} = 0$

4.– Discutir según los distintos valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, los dominios de x e y para los cuales la ecuación diferencial

$$(\lambda + x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial xy} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es parabólica, hiperbólica o elíptica.

5.– Establecer a qué tipo pertenecen las siguientes tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

a) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + u = 0$

b) $\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_3} + \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial u}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \dfrac{1}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - u = 0$

c) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_3} + \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + u = 0$

6.– Considérese el siguiente problema de Cauchy para la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Asumiendo que la función $f(x)$ es suficientemente diferenciable, construir la solución $u(x,t)$ como una serie de potencias en la variable t válida en el entorno del punto inicial $t = 0$, esto es,

$$u(x,t) = u(x,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} \frac{t^k}{k!}$$

Demostrar asímismo que si $f(x) = \sin(x)$ entonces la solución es $u(x,t) = \sin(x) e^{-\alpha^2 t}$.