CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 2

Planteamiento de Modelos Matemáticos (Curso 2023–2024)

1.– Considérese una barra unidimensional con propiedades físicas y geométricas (área y perímetro) constantes, sin fuentes de calor internas y cuya superficie lateral no se encuentra aislada.

a) Deducir la ecuación en derivadas parciales que relaciona la temperatura u en cada punto x de la barra y en cada instante t, si la energía térmica perdida por la pared lateral por unidad de superficie y de tiempo viene dada por una función conocida $q(x,t)$.

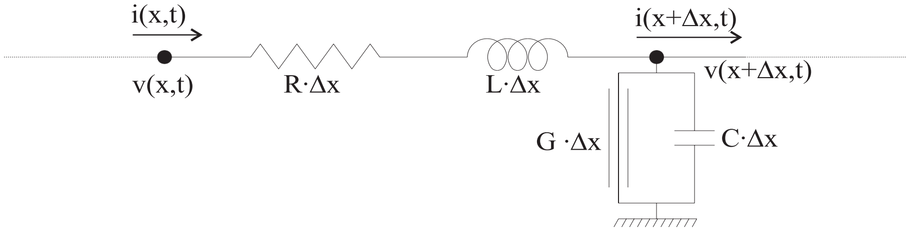
b) Deducir la ecuación en derivadas parciales que relaciona la temperatura u en cada punto x de la barra y en cada instante t, si la energía térmica perdida por la pared lateral por unidad de superficie y de tiempo $q(x,t)$ es proporcional a la diferencia de temperatura en la barra y la temperatura exterior conocida $U(x,t)$.

2.– Una barra metálica homogénea, perfectamente elástica y de área de sección transversal constante se cuelga verticalmente del techo de un ascensor, de modo que el extremo superior de la barra queda fijo. El ascensor baja en caída libre hasta el momento en que alcanza una velocidad v_1 en el que se detiene instantáneamente. Plantear el problema de contorno de las vibraciones longitudinales de la barra.

3.– Deducir la ecuación que gobierna el desplazamiento u de una cuerda a la que se aplica una fuerza —perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda— por unidad de longitud proporcional al alejamiento en cada punto de la posición de equilibrio. El coeficiente de proporcionalidad $\alpha(x)$ y la densidad $\lambda(x)$ no son constantes.

4.– Una línea de transmisión está formada por un cable de gran longitud por el que fluye corriente eléctrica. El cable presenta una resistencia eléctrica *por unidad de longitud* R y una inductancia *por unidad de longitud* L. Por otra parte, y dado que el cable no está aislado perfectamente, existe una conductancia a tierra *por unidad de longitud* G y una capacitancia a tierra *por unidad de longitud* C (en paralelo con G), como se muestra en la figura adjunta.

Sabiendo que en una bobina la variación de potencial $v(x,t)$ es proporcional a la variación de la intensidad $i(x,t)$ por unidad de tiempo (el factor de proporcionalidad es la inductancia), y que en un condensador la variación de intensidad $i(x,t)$ es proporcional a la variación del potencial $v(x,t)$ por unidad de tiempo (el factor de proporcionalidad es la capacidad), obtener las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que permiten obtener el potencial v y la intensidad i en cada punto x del cable y en cada instante de tiempo t (las denominadas "ecuaciones del telégrafo").



5.– Una cuerda perfectamente elástica de gran longitud que se encuentra inicialmente en reposo coincidiendo con la dirección del eje positivo de abscisas, se tensa de modo que el extremo $x = 0$ se mantiene fijo en todo instante de tiempo. A lo largo de la cuerda se aplica transversalmente una fuerza concentrada de magnitud K que se desplaza con velocidad constante v, partiendo del origen de coordenadas. La cuerda tiene una masa por unidad de longitud igual a λ y la tensión inicial de la cuerda es constante (τ_0).

En estas condiciones, se pide obtener la ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento vertical $y = u(x,t)$ de cada punto x de la cuerda en cada instante de tiempo t, si se consideran despreciables los efectos gravitatorios en la vibración de la cuerda. (Nota: Téngase en cuenta que una carga concentrada en un punto P se corresponde con la aplicación de una carga por unidad de longitud infinita en P y nula en los demás puntos.)

6.– Unas esferas de combustible (de radio R) generan una cantidad de calor constante Q por unidad de volumen y unidad de tiempo. A la vez, su contorno es enfriado por un fluido refrigerante, de modo que el flujo en el contorno es proporcional —según una constante h que mide la transferencia de calor combustible/fluido— a la diferencia entre la temperatura en el contorno y la temperatura del fluido —asumida constante e igual a T_F—.

Si se denomina k a la conductividad térmica del combustible, ρ a su densidad y C_p a su capacidad calorífica, deducir el problema de valores iniciales y de contorno que permite determinar la distribución de la temperatura $T(r,t)$ en una de las esferas en cualquier punto radial r e instante t, si todas las propiedades físicas son constantes. La distribución inicial de temperaturas en la esfera es conocida e igual a T_0 (constante).

7.– Una barra de acero de sección circular de radio $r(x)$, densidad constante ρ y módulo de elasticidad transversal $G(x)$ se encuentra sometida a oscilaciones angulares a lo largo de ella. Sabiendo que la sección tiene un momento de inercia a torsión $J(x)$, deducir la ecuación diferencial que rige el movimiento de oscilación angular de la barra, asumiendo que tiene lugar en pequeñas vibraciones.

Nota: Se recuerda que, siendo $\phi(x)$ el giro en una sección transversal debido a las oscilaciones, el momento torsor para una barra de sección circular es $M(x) = J(x)G(x)\phi(x)/r(x)$.

8.– Plantear el problema bidimensional de valores iniciales y de contorno correspondiente a la transmisión de calor en una placa rectangular metálica de dimensiones $L \times H$ m^2 de pequeño espesor que pierde calor por sus superficies superior e inferior según la ley de enfriamiento de Newton.

En los contornos $x = 0$ y $y = H$ se conocen los valores de las temperaturas (T_0 y T_H), el lado $x = L$ está aislado, y en el cuarto lado el flujo de calor es proporcional a la temperatura en cada punto de ese contorno. Inicialmente la distribución de temperaturas es conocida y viene dada por la función $f(x,y)$.

(Nota: Considérense constantes todas las magnitudes físicas características del material.)

9.– Como es sabido, cuando varía la temperatura de un cuerpo éste puede cambiar su estado físico. Y así por ejemplo, al descender la temperatura por debajo del punto de fusión tiene lugar el paso de fase líquida a sólida, comprobándose experimentalmente que en la superficie de cambio de fase la temperatura se mantiene constante en todo momento (e igual a la temperatura de solidificación). Si la temperatura continúa descendiendo, la superfice de cambio de fase se desplaza dentro de la masa de líquido a medida que el proceso de solidificación va progresando.

En este proceso de movimiento de la superficie de cambio de fase y solidificación de una determinada masa de líquido se produce un desprendimiento de calor latente.

Estudiemos seguidamente el proceso de congelación del agua en un lago muy profundo. Consideraremos que nuestro estudio tiene lugar en una fría noche de invierno, sin viento ni corrientes de modo que podemos considerar que la superficie del lago es plana y que el proceso de solidificación tiene lugar de tal modo que la superficie de cambio de fase se mantiene en todo momento en un plano paralelo a la superficie del lago. En estas condiciones, podemos plantear un modelo que solamente dependa de la profundidad y y del tiempo t. El origen $y = 0$ se toma en la superficie del lago y $y > 0$ a medida que aumenta la profundidad.

Para no complicar el modelo supondremos que inicialmente toda la masa de agua del lago tiene una misma temperatura T_D, mayor que la temperatura de congelación del agua (0°C), y que para $t > 0$ la temperatura en la superficie del lago ($y = 0$) se mantiene todo el tiempo a una temperatura constante T_N por debajo de los 0°C. En estas condiciones, se producirá una progresiva solidificación de la masa de agua del lago que modo que la frontera de congelación, es decir la superficie de cambio de fase, se irá desplazando a lo largo del tiempo según una función desconocida $\xi(t)$ dentro de la masa de agua que se congela.

Plantear el problema de valores iniciales y de contorno que permite obtener la temperatura en la masa de agua ($u_a(y,t)$), la temperatura en la masa de hielo ($u_h(y,t)$) —considerando el cambio de fase—, y la evolución de la frontera de congelación ($\xi(t)$).

Los calores específicos (c_a, c_h), densidades (ρ_a, ρ_h) y coeficientes de conductividad térmica (k_a, k_h) del agua y del hielo así como también el calor latente de fusión del agua dulce (λ J/kg) son conocidos y se considerarán constantes en este estudio.