CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 1

Introducción (Curso 2024–2025)

1.– Demostrar que la solución general de la ecuación $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ viene dada por

$$u(x,y)=f(\beta x-\alpha y)$$

siendo α y β constantes reales y f una función arbitraria.

2.– Verificar que las distintas funciones

$$u(x,y)=x^2-y^2,\qquad u(x,y)=e^x\sin y,\qquad u(x,y)=\ln[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2],\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones ($\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$).

3.– Demostrar que la función $u(x,t)=\sin x\cos(\alpha t)+\dfrac{1}{\alpha}\cos x\sin(\alpha t)$ es una solución del problema de valores iniciales y de contorno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad(0<x<\pi,\ t>0)$$
$$u(0,t)+u(\pi,t)=0,\qquad(t>0)$$
$$u(x,0)=\sin x,\qquad\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos x,\qquad(0\le x\le\pi)$$

4.– Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ es de la forma $u(x,y)=f(x/y)$, siendo f una función arbitraria. Asimismo, hallar una solución particular que verifique las condiciones

$$u(1,1)=2,\qquad\frac{\partial u}{\partial x}(x,1/x)=\frac{1}{x}$$

5.– Obtener la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

6.– Obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ **b)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

7.– Verificar que la solución del problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\sin(nx)}{n},$$

es la función

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{Sh}(ny)\sin(nx)}{n^2}.$$

¿Este problema está bien planteado en el sentido de Hadamard? ¿Por qué?

8.– La siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales cuasi-lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{1}$$

se denomina "ecuación de difusión de Burgers" y fue propuesta en 1948 como parte de un modelo matemático de turbulencia. Se trata de una ecuación de evolución que permite estudiar fenómenos tan distintos como los efectos viscosos y no lineales en un fluido en movimiento, o el flujo de vehículos en modelos de tráfico.

La ecuación anterior se puede transformar en una ecuación diferencial de difusión lineal mediante la conocida como transformación de Cole-Hopf que consiste en el cambio de función $u = -2\varepsilon\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$.

a) Realizar la transformación de Cole-Hopf de la ecuación de Burgers, y demostrar que la ecuación diferencial que resulta tras efectuar el cambio se satisface si la función $v(x,t)$ verifica la ecuación de difusión

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

b) Se desea resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad u(x,0) = f(x). \tag{3}$$

b.1) Asumiendo que $f(x)$ es una función integrable, determinar con la transformación de Cole-Hopf la condición inicial $v(x,0)$ necesaria para resolver la ecuación lineal (2).

b.2) Verificar que la función

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}}ds \tag{4}$$

es solución de la ecuación (2), siendo $v(x,0)$ la condición inicial obtenida del apartado anterior.

b.3) Obtener la solución $u(x,t)$ al problema de Burgers planteado en (3).