

- 1.– Demostrar que la solución general de la ecuación  $\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  viene dada por

$$u(x, y) = f(\beta x - \alpha y)$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  constantes reales y  $f$  una función arbitraria.

---

- 2.– Verificar que las distintas funciones

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad u(x, y) = e^x \sin y, \quad u(x, y) = \ln[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2], \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones ( $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ).

---

- 3.– Demostrar que la función  $u(x, t) = \sin x \cos(\alpha t) + \frac{1}{\alpha} \cos x \sin(\alpha t)$  es una solución del problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u(0, t) + u(\pi, t) &= 0, & (t > 0) \\ u(x, 0) &= \sin x, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos x, & (0 \leq x \leq \pi) \end{aligned}$$

---

- 4.– Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  es de la forma  $u(x, y) = f(x/y)$ , siendo  $f$  una función arbitraria. Asimismo, hallar una solución particular que verifique las condiciones

$$u(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1/x) = \frac{1}{x}$$

---

- 5.– Obtener la solución general de la ecuación diferencial  $\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .
- 

- 6.– Obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

$$\text{a) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{b) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

---

- 7.– Verificar que la solución del problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\sin(nx)}{n},$$

es la función

$$u(x, y) = \frac{\text{Sh}(ny) \sin(nx)}{n^2}.$$

¿Este problema está bien planteado en el sentido de Hadamard? ¿Por qué?

---

8.— La siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales cuasi-lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (1)$$

se denomina “ecuación de difusión de Burgers” y fue propuesta en 1948 como parte de un modelo matemático de turbulencia. Se trata de una ecuación de evolución que permite estudiar fenómenos tan distintos como los efectos viscosos y no lineales en un fluido en movimiento, o el flujo de vehículos en modelos de tráfico.

La ecuación anterior se puede transformar en una ecuación diferencial de difusión lineal mediante la conocida como transformación de Cole-Hopf que consiste en el cambio de función  $u = -2\varepsilon \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x}$ .

- a) Realizar la transformación de Cole-Hopf de la ecuación de Burgers, y demostrar que la ecuación diferencial que resulta tras efectuar el cambio se satisface si la función  $v(x, t)$  verifica la ecuación de difusión

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

- b) Se desea resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad u(x, 0) = f(x). \quad (3)$$

- b.1) Asumiendo que  $f(x)$  es una función integrable, determinar con la transformación de Cole-Hopf la condición inicial  $v(x, 0)$  necesaria para resolver la ecuación lineal (2).

- b.2) Verificar que la función

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s, 0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds \quad (4)$$

es solución de la ecuación (2), siendo  $v(x, 0)$  la condición inicial obtenida del apartado anterior.

- b.3) Obtener la solución  $u(x, t)$  al problema de Burgers planteado en (3).
-