CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 7

Transformaciones Integrales de Laplace y Fourier — (Curso 2023–2024)

1.– Haciendo uso de la transformación de Laplace, resolver los siguientes problemas de valores iniciales y contorno:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \sin \omega t;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0; \quad x > 0 \\ u(0,t) = \alpha;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0;\ t > 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3y^2; \quad x > 0,\ y > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,y) = -y;\ y > 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x};\ x > 0 \\ u(0,t) = \sin t;\ t > 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) \ \text{acotada}; \quad t > 0 \end{cases}$$

Solución 1.a) Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(u_{tt} - \alpha^2 u_{xx}\right) = 0 \Longrightarrow s^2 \mathcal{L}(u) - s u(x,0) - u_t(x,0) - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}(u)\right) = 0$$

Si se utiliza la notación $U(x,s) = \mathcal{L}(u)$ y se tienen en cuenta las condiciones iniciales del problema se obtiene la EDO de segundo orden $s^2 U - \alpha^2 U_{xx} = 0$. Si se aplica la transformación integral a las condiciones de contorno, resulta:

$$\mathcal{L}(u(0,t)) = U(0,s) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = \mathcal{L}(0) = 0$$

Por tanto, hay que resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{s^2}{\alpha^2} U = 0 \\ U(0,s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x,s) = 0 \end{cases}$$

La solución del problema anterior es $U(x,s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} e^{-\frac{sx}{\alpha}}$, cuya transformada inversa es

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right] u\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)$$

Solución 1.b) Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(u_t - k u_{xx}\right) = 0 \Longrightarrow s\mathcal{L}(u) - u(x,0) - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}(u)\right) = 0$$

Si se utiliza la notación $U(x,s) = \mathcal{L}(u)$ y se tienen en cuenta las condiciones iniciales del problema se obtiene la EDO de segundo orden $sU - kU_{xx} = 0$. Si se aplica la transformación integral a las condiciones de contorno, resulta:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(u(0,t)) = U(0,s) = \mathcal{L}(\alpha) = \frac{\alpha}{s} \\ &\lim_{x\to\infty} U(x,s) = \mathcal{L}(0) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, hay que resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{s}{k}U = 0 \\ U(0,s) = \dfrac{\alpha}{s} \\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x,s) = 0 \end{cases}$$

La solución del problema anterior es $U(x,s) = \frac{\alpha}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}$. La transformada inversa de funciones de la forma general $e^{-a\sqrt{s}}/s$ no se encuentra habitualmente tabulada en tablas de transformadas de Laplace reducidas. Puede encontrarse, no obstante, en la referencia *Fórmulas y tablas de matemática aplicada* de M.R. Spiegel y L. Abellanas; colección Shaum, Mc Graw Hill. Viene dada por $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ siendo $\operatorname{erfc}(x)$ la función complementaria de error

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-z^2}dz$$

En consecuencia, la solución es:

$$u(x,t) = \alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$$

Solución 1.c) Aplicando la transformada de Laplace en la variable y a la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(\alpha u_x + \beta u_y - 3y^2\right) = 0 \Longrightarrow \alpha\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(u) + \beta\left(s\mathcal{L}(u) - u(x,0)\right) - \frac{6}{s^3} = 0$$

Si se utiliza la notación $U(x,s) = \mathcal{L}(u)$ y se tiene en cuenta la condición inicial $u(x,0) = 0$ se obtiene la EDO de primer orden $\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\beta s}{\alpha}U = \dfrac{6}{\alpha s^3}$. Si se aplica la transformación integral a la condición $u(0,y) = -y$, resulta:

$$\mathcal{L}(u(0,y)) = U(0,s) = \mathcal{L}(-y) = -\frac{1}{s^2}$$

Por tanto, hay que resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\beta}{\alpha} sU = \dfrac{6}{\alpha s^3} \\ U(0,s) = -\dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

La solución del problema anterior es $U(x,s) = Ce^{-\dfrac{\beta s x}{\alpha}} + \dfrac{6}{\beta s^4}$, con $C = -\frac{1}{s^2} - \frac{6}{\beta s^4}$. La transformada de la solución es, por tanto,

$$U(x,s) = -\frac{1}{s^2} e^{-\dfrac{\beta x}{\alpha} s} - \frac{6}{\beta s^4} e^{-\dfrac{\beta x}{\alpha} s} + \frac{6}{\beta s^4}$$

cuya transformada inversa es:

$$u(x,t) = -\left[\left(y - \frac{\beta x}{\alpha} \right) + \frac{1}{\beta} \left(y - \frac{\beta x}{\alpha} \right)^3 \right] u \left(y - \frac{\beta x}{\alpha} \right) + \frac{y^3}{\beta}$$

Solución 1.d) Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(u_{tt} - \alpha^2 u_{xx}\right) = 0 \Longrightarrow s^2 \mathcal{L}(u) - su(x,0) - u_t(x,0) - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mathcal{L}(u)\right) = 0$$

Si se utiliza la notación $U(x,s) = \mathcal{L}(u)$ y se tienen en cuenta las condiciones iniciales del problema se obtiene la EDO de segundo orden $U_{xx} - \frac{s^2}{\alpha^2} U = -\frac{1}{\alpha^2} e^{-x}$.

Si se aplica la transformación integral a las condiciones de contorno, resulta:

$$\mathcal{L}(u(0,t)) = U(0,s) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t)) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = \mathcal{L}(0) = 0$$

Por tanto, hay que resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{s^2}{\alpha^2} U = -\dfrac{1}{\alpha^2} e^{-x} \\ U(0,s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x,s) = 0 \end{cases}$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior (suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea y una solución particular) es:

$$U(x,s) = C_1 e^{-\dfrac{sx}{\alpha}} + C_2 e^{\dfrac{sx}{\alpha}} + \frac{1}{s^2 - \alpha^2} e^{-x}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene:

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{sx}{\alpha}} - \frac{1}{s^2-\alpha^2}e^{-\frac{sx}{\alpha}} + \frac{1}{s^2-\alpha^2}e^{-x}$$

cuya transformada inversa es

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)u\left(t-\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\operatorname{Sh}\left[\alpha\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)\right]u\left(t-\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{e^{-x}}{\alpha}\operatorname{Sh}(\alpha t)$$

2.– Considérese una cuerda elástica tensa de longitud L y peso por unidad de longitud λ (constante) sobre la que actúa una fuerza distribuida $f(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$; $n \in \mathbb{N}$, $0 < x < L$, $t > 0$. Plantear el problema de vibraciones correspondiente sabiendo que la cuerda está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio y que su tensión T puede asumirse constante a lo largo de todo el movimiento. Obtener asimismo la posición $u(x,t)$ de la cuerda en cualquier punto x e instante de tiempo t, para los distintos valores de la frecuencia ω de la fuerza externa aplicada.

Solución 2. El problema a resolver es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{g}{\lambda}f(x,t) \\ u(0,t) = 0;\ t \geq 0 \\ u(L,t) = 0;\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0;\ 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;\ 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(u_{tt} - c^2u_{xx} - \frac{g}{\lambda}f\right) = 0 \Longrightarrow s^2\mathcal{L}(u) - su(x,0) - u_t(x,0) - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}(u)\right) - \frac{g}{\lambda}\mathcal{L}(f) = 0$$

Si se utiliza la notación $U(x,s) = \mathcal{L}(u)$ y se tienen en cuenta las condiciones iniciales y de contorno se llega al siguiente problema de contorno de EDO's:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{s^2}{c^2}U = -\dfrac{g}{\lambda c^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\dfrac{s}{s^2+\omega^2} \\ U(0,s) = 0 \\ U(L,s) = 0 \end{cases}$$

cuya solución se puede expresar como

$$U(x,s) = C_1e^{\frac{sx}{c}} + C_2e^{-\frac{sx}{c}} + U_p(x,s)$$

siendo $U_p(x,s)$ una solución particular, por ejemplo:

$$U_p(x,s) = \frac{g}{\lambda}\frac{s}{(s^2+\omega^2)\left(s^2+c^2\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\right)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

En consecuencia, la solución a falta de imponer las condiciones de contorno es:

$$U(x,s) = C_1 e^{\frac{sx}{c}} + C_2 e^{-\frac{sx}{c}} + \frac{g}{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{s}{(s^2+\omega^2)\left(s^2+\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\right)}$$

Al imponer las condiciones de contorno, resulta $C_1 = C_2 = 0$, por lo que la transformada de Laplace de la solución es:

$$U(x,s) = \frac{g}{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{s}{(s^2+\omega^2)\left(s^2+\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\right)}$$

Para hallar la transformada inversa de $U(x,s)$, distinguimos dos situaciones:

• $\omega \neq \frac{n\pi c}{L}$. En ese caso

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)\left(s^2+\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\right)} = \frac{1}{\omega^2-\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}}\left(\frac{s}{s^2+\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

por lo que

$$u(x,t) = \frac{g\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)}{\lambda\left(\omega^2-\dfrac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) - \cos(\omega t)\right)$$

• $\omega = \frac{n\pi c}{L}$. En ese caso se produce resonancia, y la solución viene dada por

$$u(x,t) = \frac{g\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)}{\lambda}\frac{L}{2n\pi c}\,t\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

3.– Una cuerda perfectamente elástica semiinfinita que se encuentra inicialmente en reposo coincidiendo con la dirección del eje positivo de abscisas, se tensa de modo que el extremo $x = 0$ se mantiene fijo en todo instante de tiempo. A lo largo de la cuerda se aplica transversalmente una fuerza concentrada de magnitud K que se desplaza con velocidad constante v, partiendo del origen de coordenadas. Si se desprecia el peso de la cuerda, la ecuación diferencial que permite obtener el desplazamiento vertical y de cada punto x de la cuerda en cada instante de tiempo t, viene dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - w^2\,\delta\left(t-\frac{x}{v}\right), \qquad 0<x<\infty,\quad t>0; \qquad c^2 = \frac{\tau_0}{\lambda},\quad w^2 = \frac{K}{\lambda},$$

siendo λ la masa de la cuerda por unidad de longitud, τ_0 la tensión de la cuerda y δ la "función" delta de Dirac.

Teniendo en cuenta que, dadas las características de este modelo, el desplazamiento de la cuerda en puntos suficientemente alejados será siempre finito (por tanto $y(x,t)$ estará acotada cuando $x \to \infty$), obtener las Transformadas de Laplace de la función $y(x,t)$ cuando

a) la velocidad v de aplicación de la carga es distinta a la d propagación de la onda c, y

b) la velocidad v de aplicación de la carga es igual a la de propagación de la onda c.

Obtener asimismo las expresiones del desplazamiento de la cuerda $y(x,t)$ en los casos **a)** y **b)**, y representar cualitativamente la forma de la cuerda para un instante de tiempo determinado cuando $v < c$, $v = c$ y $v > c$. ¿Tiene sentido físico la solución obtenida?

NOTA: Téngase en cuenta que las *soluciones particulares* de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $z'' - a^2 z = e^{-bx}$, $\quad b > 0$, vienen dadas por $z_p(x) = \dfrac{e^{-bx}}{b^2 - a^2}$ si $b \neq a$, y $z_p(x) = \dfrac{-xe^{-bx}}{b+a}$ si $b = a$.

Solución 3.a) Planteando la ecuación de Newton en un intervalo de cuerda de longitud Δx, se obtiene

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx T(x+\Delta x) \operatorname{sen} \theta(x+\Delta x, t) - T(x,t) \operatorname{sen} \theta(x,t) - \lambda \Delta x b(x,t) - F_{\text{ext}} \Delta x$$

Si la expresión anterior se lleva al límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x,t) \operatorname{sen} \theta(x,t) \right) - \lambda b(x,t) - F_{\text{ext}}$$

A continuación haremos las hipótesis $T(x,t) = \tau_0 = $ cte., $\operatorname{sen} \theta(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ y tendremos en cuenta que la fuerza exterior viene dada por la expresión $F_{\text{ext}} = k\delta\left(t - x/v\right)$. Finalmente, si definimos $c^2 = \tau_0/\lambda$ y $\omega^2 = k/\lambda$, el problema completo se puede plantear como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \omega^2 \delta\left(t - x/v\right) \\ y(0,t) = 0;\ t > 0 \\ y(x,t) \quad \text{acotado si} \quad x \to \infty \\ y(x,0) = 0;\ 0 \leq x < \infty \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0;\ 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Solución 3.b) Para resolver el problema anterior, aplicamos la transformada de Laplace en la variable tiempo con la notación $\mathcal{L}(y(x,t)) = Y(x,s)$, resulta

$$s^2 Y(x,s) - s \underbrace{y(x,0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)}_{=0} = c^2 \frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2} - \omega^2 e^{-\frac{xs}{v}}$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada a la anterior EDO es

$$Y_h(x,s) = K_1 e^{\frac{sx}{c}} + K_2 e^{-\frac{sx}{c}}$$

mientras que una solución particular, viene dada por

$$Y_p(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\dfrac{1}{s^2}e^{-\frac{xs}{v}};\ v \neq c \\ \\ -\dfrac{\omega^2 v}{c(c+v)}\dfrac{x}{s}e^{-\frac{xs}{v}};\ v = c \end{cases}$$

En consecuencia, la solución general de la EDO viene dada por

$$Y(x,s) = K_1 e^{\frac{sx}{c}} + K_2 e^{-\frac{sx}{c}} + \begin{cases} \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\dfrac{1}{s^2}e^{-\frac{xs}{v}};\ v \neq c \\ \\ -\dfrac{\omega^2 v}{c(c+v)}\dfrac{x}{s}e^{-\frac{xs}{v}};\ v = c \end{cases}$$

Sólo resta imponer las condiciones de contorno para obtener la transformada de la solución, i.e.,

$$Y(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\left[\dfrac{1}{s^2}e^{-\frac{xs}{v}} - \dfrac{1}{s^2}e^{-\frac{xs}{c}}\right];\ v \neq c \\ \\ \dfrac{\omega v}{c(c+v)}\left[-\dfrac{x}{s}e^{-\frac{xs}{v}}\right];\ v = c \end{cases}$$

Solución 3.c) La solución del problema es, por tanto, la transformada inversa de $Y(x,s)$

$$y(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\left[\left(t - \dfrac{x}{v}\right)u\left(t - \dfrac{x}{v}\right) - \left(t - \dfrac{x}{c}\right)u\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right];\ v \neq c \\ \\ \dfrac{\omega}{2v}\left[-xu\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right];\ v = c \end{cases}$$

Solución 3.d) La solución también se puede expresar del siguiente modo:

$$y(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\left[\left(\dfrac{x-ct}{c}\right)\widehat{u}(x-ct) - \left(\dfrac{x-vt}{v}\right)\widehat{u}(x-vt)\right];\ v \neq c \\ \\ \dfrac{\omega}{2v}\left[-x\widehat{u}(x-vt)\right];\ v = c \end{cases}$$

donde

$$\widehat{u}(x-ct) = \begin{cases} 0;\ x > ct \\ 1;\ x < ct \end{cases}$$

A continuación, particularizaremos la solución para 3 casos representativos del comportamiento de la misma, por ejemplo, en el instante de tiempo $t = 1/c$:

• Si $v < c$

$$y(x,t) = \frac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\left[\frac{x-1}{c}\widehat{u}(x-1) - \frac{x - v/c}{v}\widehat{u}(x - v/c)\right] = \begin{cases} 0; & x > 1 \\ \dfrac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\dfrac{x-1}{c}; & v/c < x < 1 \\ -\dfrac{\omega^2 v^2}{vc(v+c)}x; & x < v/c \end{cases}$$

• Si $v > c$

$$y(x,t) = \frac{\omega^2 v^2}{c^2 - v^2}\left[\frac{x-1}{c}\widehat{u}(x-1) - \frac{x - v/c}{v}\widehat{u}(x - v/c)\right] = \begin{cases} 0; & x > v/c \\ -\dfrac{\omega^2 v^2}{v^2 - c^2}\dfrac{v/c - x}{v}; & 1 < x < v/c \\ -\dfrac{\omega^2 v^2}{vc(v+c)}x; & x < 1 \end{cases}$$

• Si $v = c$

$$y(x,t) = \frac{\omega}{2v}\left[-x\widehat{u}(x-1)\right] = \begin{cases} 0; & x > 1 \\ -\dfrac{\omega}{2v}x; & x < 1 \end{cases}$$

4.– Se quiere estudiar el comportamiento a torsión de un eje metálico de sección transversal circular y longitud L. Para ello se preparan una serie de ensayos consistentes en mantener uno de los extremos del eje fijo y aplicar en el otro un momento torsor variable, observar las deformaciones angulares que sufre el eje y comparar los resultados con los obtenidos con un modelo de cálculo. Un modelo matemático de este problema físico se puede plantear del siguiente modo: En ausencia de momentos externos aplicados a lo largo del eje y considerando que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones, el ángulo $\theta(x,t)$ girado por cada sección en cada punto x del eje y en cada instante t, satisfacen la ecuación diferencial $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(G(x)J(x)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = J(x)\rho(x)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$, siendo $J(x)$ el momento polar de inercia a torsión, $G(x)$ el módulo de elasticidad transversal y $\rho(x)$ la densidad del material. En el caso que nos ocupa las propiedades físicas del material pueden considerarse constantes, el eje tiene sección transversal circular uniforme, un extremo está fijo, en el otro se aplica un momento torsor variable, e inicialmente no hay variaciones angulares de las secciones ni momentos aplicados en ningún punto del eje, por lo que podemos plantear el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad \theta(x,0) = 0, \quad \frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < L; \\ \theta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial\theta(L,t)}{\partial x} = \phi(t), \quad t > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Obtener la solución de este problema en el caso en que $\phi(t) = 1$ por Separación de Variables (denomínese $u(x,t)$ a la función obtenida). Asímismo, y haciendo uso de la Tabla de Transformadas de Laplace, relacionar las transformadas de Laplace de las funciones $u(x,t)$ y $\theta(x,t)$, y obtener una fórmula de Duhamel para calcular los desplazamientos angulares $\theta(x,t)$ a partir $u(x,t)$ y $\phi(t)$.

Solución 4. La solución para el caso $\Phi(t) = 1$ por separación de variables viene dada por

$$u(x,t) = x + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\mu_n^2}\cos(c\mu_n t)\,\mathrm{sen}(\mu_n x)\right] \quad \text{con} \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

Fórmula de Duhamel:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 1 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{s^2}{c^2}U = 0 \\ U(0,s) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(L,s) = \dfrac{1}{s} \end{array}\right.$$

donde $U(x,s) = \mathcal{L}\left(u(x,t)\right)$. La solución general del problema anterior es $U(x,s) = A_1 e^{\frac{xs}{c}} + A_2 e^{-\frac{xs}{c}}$. Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene la solución particular

$$U(x,s) = \frac{\mathrm{Sh}(sx/a)}{\mathrm{Ch}(sL/a)}\frac{a}{s^2}$$

Si repetimos el proceso con $\theta(x,t)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \theta(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = \phi(t) \\ \theta(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}(x,0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \dfrac{s^2}{c^2}\Theta = 0 \\ \Theta(0,s) = 0 \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}(L,s) = \Phi(s) \end{array}\right.$$

donde $\Theta(x,s)$ y $\Phi(s)$ son las transformadas de Laplace de $\theta(x,t)$ y $\phi(t)$, respectivamente. La solución general del problema anterior es $\Theta(x,s) = A_1 e^{\frac{xs}{c}} + A_2 e^{-\frac{xs}{c}}$. Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene la solución particular

$$\Theta(x,s) = \frac{\mathrm{Sh}(sx/a)}{\mathrm{Ch}(sL/a)}\frac{a}{s}\Phi(s)$$

De las anteriores expresiones se observa que las transformadas de Laplace de $u(x,t)$ y $\theta(x,t)$ verifican la relación $\Theta(x,s) = sU(x,s)\Phi(s)$. Dado que $u(x,0) = 0$, también se verifica $\Theta(x,s) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Phi(s)$ puesto que $\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = sU(x,s) - u(x,0)$.

Si aplicamos ahora las propiedades de convolución de dos funciones, tenemos

$$\theta(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\Theta(x,s)\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \star \phi = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \tau}(x,t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

La fórmula de Duhamel es

$$\theta(x,t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \tau}(x,t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Integrando por partes se obtiene otra fórmula de Duhamel, es decir

$$\theta(x,t) = \phi(0)u(x,t) + \int_0^t \phi'(\tau)u(x,t-\tau)d\tau$$

donde $u(x,t)$ es la solución en serie de Fourier correpondiente al caso $\phi = 1$

5.– Resolver mediante transformadas de Fourier los problemas iniciales y de contorno siguientes:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}; \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,u; \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,t) \quad \text{acotada} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ u(x,0) = f(x); \quad 0 \le x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y); \quad 0 \le y < \infty \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad x > 0,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0; \quad x > 0 \\ u(0,y) = y^2(1-y); \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

Solución 5.a) Asumiremos que la solución y sus derivadas parciales respecto de x son nulas cuando $|x| \to \infty$. Aplicando la transformada de Fourier, resulta

$$\mathcal{F}(u_{tt} - u_{xxxx}) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t^2}\mathcal{F}(u) - \omega^4 \mathcal{F}(u) = 0$$

Si se utiliza la notación $U(\omega,t) = \mathcal{F}(u)$ y se aplica la transformación integral a las condiciones de iniciales, resulta:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(u(x,0)) = U(\omega,0) = \mathcal{F}(f(x)) \\ &\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,0) = 0 \end{aligned}$$

por lo que hay que resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \omega^4 U = 0 \\ U(\omega,0) = \mathcal{F}(f) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\omega,0) = 0 \end{cases}$$

La solución del problema anterior es $U(\omega,t)=\mathcal{F}(f)\left(e^{-\omega^2 t}+e^{\omega^2 t}\right)/2=\mathcal{F}(f)\mathrm{Ch}(\omega^2 t)$, cuya transformada inversa es

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)\mathrm{Ch}(\omega^2 t)e^{i\omega x}d\omega$$

Substituyendo $\mathcal{F}(f)$ por su valor obtenemos:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-i\omega s}\mathrm{Ch}(\omega^2 t)e^{i\omega x}dsd\omega$$

Solución 5.b) Asumiremos que la solución y sus derivadas parciales respecto de x son nulas cuando $|x|\to\infty$. Aplicando la transformada de Fourier, resulta

$$\mathcal{F}(u_t-u_{xx}-ku)=0\Longrightarrow\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u)+\omega^2\mathcal{F}(u)-k\mathcal{F}(u)=0$$

Si se utiliza la notación $U(\omega,t)=\mathcal{F}(u)$ y se aplica la transformación integral a la condición inicial, resulta el siguiente problema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+(\omega^2-k)U=0\\ U(\omega,0)=\mathcal{F}(f)\end{cases}$$

Resolviendo esta EDO de primer orden se obtiene $U(\omega,t)=\mathcal{F}(f)e^{(k-\omega^2)t}$, por lo que la solución es

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)e^{(k-\omega^2)t}e^{i\omega x}d\omega$$

Substituyendo $\mathcal{F}(f)$ por su valor obtenemos:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{(k-\omega^2)t}e^{(x-s)i\omega}dsd\omega$$

Solución 5.c) Dado que la ecuación diferencial está definida sólo para valores de $x>0$ y de $y>0$, optaremos por aplicar una transformación seno o coseno de Fourier. Si se aplica esta última en la variable x, entonces resulta:

$$\mathcal{F}_C(u_{xx}+u_{yy})=0\Longrightarrow-\omega^2\mathcal{F}_C(u)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)}_{g(y)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{F}_C(u)=0$$

Si se utiliza la notación $U(\omega,y)=\mathcal{F}_C(u)$ y se aplica la transformación integral a las condiciones de contorno, resulta el siguiente problema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\omega^2 U=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}g(y)\\ U(\omega,0)=\mathcal{F}_C(f)\\ \lim\limits_{y\to\infty}U(\omega,y)=0\end{cases}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$U(\omega,y)=C_1e^{-\omega y}+C_2e^{\omega y}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega}\int_y^{\infty}g(y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau$$

donde C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones de contorno. De este modo se obtiene la transformada de la solución, es decir,

$$U(\omega,y)=\mathcal{F}_C(f)e^{-\omega y}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\omega y}\frac{1}{\omega}\int_0^{\infty}g(y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega}\int_y^{\infty}g(y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau$$

y su transformada inversa es la solución $u(x,y)$:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\omega=0}^{\omega\to\infty}\mathcal{F}_C(f)e^{-\omega y}\cos(\omega x)d\omega\\ &-\frac{2}{\pi}\int_{\omega=0}^{\omega\to\infty}\left(\frac{e^{-\omega y}}{\omega}\int_{\tau=0}^{\tau\to\infty}g(y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau\right)\cos(\omega x)d\omega\\ &+\frac{2}{\pi}\int_{\omega=0}^{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{\omega}\int_{\tau=y}^{\tau\to\infty}g(y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau\right)\cos(\omega x)d\omega\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{F}_C(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{s=0}^{s\to\infty}f(s)\cos(\omega s)ds$$

Solución 5.d) Si aplicamos una transformación seno de Fourier en la variable x, resulta:

$$\mathcal{F}_S(u_{xx}+u_{yy})=0\Longrightarrow-\omega^2\mathcal{F}_S(u)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\underbrace{u(0,y)}_{y^2(1-y)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{F}_S(u)$$

Si se utiliza la notación $U(\omega,y)=\mathcal{F}_S(u)$ y se aplica la transformación integral a las condiciones de contorno, resulta el siguiente problema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-\omega^2U=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\omega y^2(1-y)\\ U(\omega,0)=\mathcal{F}_S(u(x,0))=0\\ U(\omega,1)=\mathcal{F}_S(u(x,1))=0\end{cases}$$

La solución general es

$$U(\omega,y)=C_1e^{-\omega y}+C_2e^{\omega y}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^y(y-\tau)^2(1-y-\tau)\mathrm{Sh}(\omega\tau)d\tau$$

donde C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones de contorno. De este modo se obtiene la transformada de la solución, es decir,

$$U(\omega, y) = \frac{\text{Sh}(\omega y)}{\text{Sh}(\omega)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (y-\tau)^2(1-y-\tau)\text{Sh}(\omega\tau)d\tau - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y (y-\tau)^2(1-y-\tau)\text{Sh}(\omega\tau)d\tau$$

La solución $u(x,t)$ se obtiene de aplicar ahora la transformación inversa seno de Fourier, de modo que:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega=0}^{\omega\to\infty} \left[\frac{\text{Sh}(\omega y)}{\text{Sh}(\omega)} \int_{\tau=0}^{\tau=1} H(y,\tau,\omega)d\tau - \int_{\tau=0}^{\tau=y} H(y,\tau,\omega)d\tau \right] \text{sen}(\omega x) d\omega$$

siendo $H(y,\tau,\omega) = (y-\tau)^2(1-y-\tau)\text{Sh}(\omega\tau)$