# CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 6

**Funciones de Green** (Curso 2023–2024)

**1.–** Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$y'' + y = f(x), \quad 0 < x < L; \qquad y(0) = \alpha, \quad y(L) = \beta; \quad L \neq n\pi, \ \ n \in \mathbb{N},$$

para distintas funciones $f(x)$ y distintos valores de $\alpha$ y $\beta$. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $f(x)$ y a las constantes $\alpha$ y $\beta$, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obteniendo previamente la "función de influencia" o función de Green $G(s, x)$ de la ecuación diferencial, demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)\, G(s, x)\, ds + \frac{\beta \sin(x) - \alpha \sin(x - L)}{\sin L}; \quad L \neq n\pi, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

---

**Solución 1.** Nos planteamos el problema $\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = h(x) \\ u(0) = 0; \ u(L) = 0 \end{array} \right\}$

La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u_h'' + u_h = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x) \operatorname{sen}(x) + v_2(x) \cos(x)$. Por tanto,

$$u_p' = v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) + v_1 \cos(x) - v_2 \sin(x)$$

Si se impone $v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) = 0$, se obtiene $u_p''$ como

$$u_p'' = v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) - v_1 \operatorname{sen}(x) - v_2 \cos(x)$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{array}{l} v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) = h(x) \\ v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) = 0 \end{array}$$

de donde resulta $v_1' = h(x) \cos(x)$ y $v_2' = -h(x) \operatorname{sen}(x)$. En consecuencia,

$$v_1 = K_1 + \int_0^x h(s) \cos(s) ds \quad \text{y} \quad v_2 = K_2 - \int_0^x h(s) \operatorname{sen}(s) ds$$

Por tanto, la solución general será:

$$u(x) = \left[K_1 + \int_0^x h(s)\cos(s)ds\right]\operatorname{sen}(x) + \left[K_2 - \int_0^x h(s)\operatorname{sen}(s)ds\right]\cos(x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno se determinan $K_1$ y $K_2$ y se obtiene la solución

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-L)}{\operatorname{sen}(L)}\int_0^x h(s)\operatorname{sen}(s)ds + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(L)}\int_x^L h(s)\operatorname{sen}(s-L)ds = \int_0^L h(s)G(x,s)ds$$

siendo

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-L)\operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}(L)}; & 0 < s < x \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(s-L)}{\operatorname{sen}(L)}; & x < s < L \end{cases}$$

Para obtener la solución del problema no homogéneo, aplicamos la identidad de Green:

$$\int_a^b (u\mathcal{L}(v) - v\mathcal{L}(u))\,dx = r(x)\,\left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\right]\Big|_a^b \text{ siendo } \mathcal{L}(\cdot) \equiv \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{d\cdot}{dx}\right) + q(x)\cdot$$

En este caso $r(x) = 1$, $q(x) = 1$, $a = 0$, $b = L$ y elegimos $u(x) = y(x)$ y $v(x) = G(x,s)$. Por tanto,

$$\int_0^L y(s)\mathcal{L}[G(x,s)]ds - \int_0^L G(x,s)\mathcal{L}[y]ds = \left(\underbrace{y(L)}_{=\beta}\frac{dG(x,s)}{ds}\Big|_{s=L} - \underbrace{G(x,L)}_{=0}y'(L)\right) -$$
$$- \left(\underbrace{y(0)}_{=\alpha}\frac{dG(x,s)}{ds}\Big|_{s=0} - \underbrace{G(x,0)}_{=0}y'(0)\right)$$

y, en consecuencia,

$$\int_0^L y(s)\delta(x-s)ds - \int_0^L G(x,s)f(s)ds = \beta\,\frac{dG(x,s)}{ds}\Big|_{s=L} - \alpha\,\frac{dG(x,s)}{ds}\Big|_{s=0}$$

Mediante derivación directa se obtiene

$$\frac{dG}{ds} = \begin{cases} \dfrac{\cos(s)\operatorname{sen}(x-L)}{\operatorname{sen}(L)}; & 0 < s < x \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(s-L)}{\operatorname{sen}(L)}; & x < s < L \end{cases}$$

y la solución del problema es

$$\boxed{y(x) = \int_0^L f(s)G(x,s)ds + \frac{\beta\operatorname{sen}(x) - \alpha\operatorname{sen}(x-L)}{\operatorname{sen}(L)}}$$

**2.–** Obtener la expresión de la solución al problema de contorno

$$y'' = f(x), \quad 0 < x < L; \qquad y(0) = \alpha, \quad y'(L) + cy(L) = \beta; \quad c > 0, \quad L > 0,$$

para distintas funciones $f(x)$ y distintos valores de $\alpha$ y $\beta$, en términos de su "función de influencia" o función de Green.

---

**Solución 2.** Nos planteamos el problema $\left\{ \begin{array}{l} u'' = f(x) \\ u(0) = 0; \ u'(L) + cu(L) = 0 \end{array} \right\}$

La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u_h'' = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 + C_2 x$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x) + v_2(x)x$. Por tanto,

$$u_p' = v_1' + v_2' x + v_2$$

Si se impone $v_1' + v_2' x = 0$, se obtiene $u_p'' = v_2'$. Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{array}{l} v_1'(x) = -xf(x) \\ v_2'(x) = f(x) \end{array}$$

En consecuencia,

$$v_1 = K_1 - \int_0^x sf(s)ds \quad \text{y} \quad v_2 = K_2 + \int_0^x f(s)ds$$

Por tanto, la solución general será:

$$u(x) = \left[ K_1 - \int_0^x sf(s)ds \right] + \left[ K_2 + \int_0^x f(s)ds \right] x$$

Imponiendo las condiciones de contorno se determinan $K_1$ y $K_2$ y se obtiene la solución particular

$$u(x) = \int_0^x \left( \frac{cx}{1+cL} - 1 \right) sf(s)ds + \int_x^L \left( \frac{cs}{1+cL} - 1 \right) xf(s)ds = \int_0^L f(s)G(x,s)ds$$

siendo

$$G(x,s) = \left\{ \begin{array}{ll} \left( \dfrac{cx}{1+cL} - 1 \right) s; & 0 < s < x \\ \left( \dfrac{cs}{1+cL} - 1 \right) x; & x < s < L \end{array} \right.$$

Para obtener la solución del problema no homogéneo, aplicamos la identidad de Green. De este modo se obtiene:

$$y(x) = \int_0^L f(s)G(x,s)ds + y(L) \underbrace{\left.\frac{dG(x,s)}{ds}\right|_{s=L}}_{-c\,G(x,L)} - G(x,L)y'(L) - \left( \underbrace{y(0)}_{=\alpha} \left.\frac{dG(x,s)}{ds}\right|_{s=0} - \underbrace{G(x,0)}_{=0} y'(0) \right)$$

y, en consecuencia,

$$y(x) = \int_0^L f(s)G(x,s)ds - G(x,L) \underbrace{\left[cy(L) + y'(L)\right]}_{\beta} - \alpha \left.\frac{dG(x,s)}{ds}\right|_{s=0}$$

dado que

$$G(x,L) = \frac{-x}{1+cL} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dG(x,s)}{ds}\right|_{s=0} = \frac{cx}{1+cL} - 1$$

al substituir obtenemos la solución

$$\boxed{y(x) = \int_0^L f(s)G(x,s)ds + \frac{(\beta - \alpha c)x}{1+cL} + \alpha}$$

---

**3.–** Obtener la función de influencia o “función de Green” $G(x,s)$ que proporciona la flecha de una viga uniforme (de longitud $L$) en voladizo producida por la aplicación de una carga puntual en un punto $s$; es decir, resolver el problema de contorno:

$$\begin{aligned} &EI\frac{d^4G}{dx^4} = \delta(x-s), \qquad 0 < x < L \\ &G(0,s) = 0, \quad G'(0,s) = 0 \\ &G''(L,s) = 0, \quad G'''(L,s) = 0, \end{aligned}$$

siendo $E$ el módulo de elasticidad e $I$ el momento de inercia.

Obtener asímismo la flecha de una viga uniforme en voladizo que soporta una carga distribuida por unidad de longitud igual a $w(x) = K\,x$.

---

**Solución 3.** Nos planteamos el problema $\left\{ \begin{array}{l} y^{IV} = \dfrac{1}{EI} f \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(L) = y'''(L) = 0 \end{array} \right\}$

La EDO homogénea asociada al problema anterior es $y_h^{IV} = 0$ y su solución $y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $y_p(x) = v_1(x) + v_2(x)x + v_3(x)x^2 + v_4(x)x^3$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
y_p' &= v_2 + 2xv_3 + 3x^2 v_4 + \underbrace{v_1' + v_2' x + v_3' x^2 + v_4' x^3}_{=0} \\
y_p'' &= 2v_3 + 6xv_4 + \underbrace{v_2' + 2xv_3' + 3x^2 v_4'}_{=0} \\
y_p''' &= 6v_4 + \underbrace{2v_3' + 6xv_4'}_{=0} \\
y_p^{IV} &= 6v_4'
\end{aligned}
$$

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
v_1'(x) &= \frac{-x^3}{6EI} f(x);\; v_2'(x) = \frac{x^2}{2EI} f(x) \\
v_3'(x) &= \frac{-x}{2EI} f(x);\; v_4'(x) = \frac{1}{6EI} f(x)
\end{aligned}
$$

Y, por tanto, la solución general es:

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\left[K_1 - \frac{1}{6EI}\int_0^x s^3 f(s)ds\right] + \left[K_2 + \frac{1}{2EI}\int_0^x s^2 f(s)ds\right] x+ \\
&+ \left[K_3 - \frac{1}{2EI}\int_0^x s f(s)ds\right] x^2 + \left[K_4 + \frac{1}{6EI}\int_0^x f(s)ds\right] x^3
\end{aligned}
$$

Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene la solución:

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\left(-\frac{1}{6EI}\int_0^x s^3 f(s)ds\right) + \left(\frac{1}{2EI}\int_0^x s^2 f(s)ds\right) x+ \\
&+ \left(\frac{1}{2EI}\int_x^L s f(s)ds\right) x^2 + \left(-\frac{1}{6EI}\int_x^L f(s)ds\right) x^3 = \int_0^L G(x,s) f(s)ds
\end{aligned}
$$

donde

$$
G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s^2(3x-s)}{6EI}; & 0 < s < x \\ \dfrac{x^2(3s-x)}{6EI}; & x < s < L \end{cases}
$$

• Si $f(x) = \delta(x - L/2)$, entonces la flecha es:

$$
y(x) = \int_0^L G(x,s)\delta(s - L/2)ds = G(x, L/2) = \begin{cases} \dfrac{L^2(3x - L/2)}{24EI}; & x > L/2 \\ \dfrac{x^2(3L/2 - x)}{6EI}; & x < L/2 \end{cases}
$$

• Si $f(x) = Kx$, entonces la flecha es:

$$
y(x) = \int_0^L KG(x,s)s ds = \frac{K}{6EI}\left(\int_0^x s^3(3x-s)ds + \int_x^L x^2(3s-x)s ds\right) =
$$

$$= \frac{K}{120EI}(x^5 - 120L^2x^3 + 20L^3x^2)$$

---

**4.–** Resolver la ecuación diferencial $\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha})$ mediante su desarrollo en funciones propias en los siguientes casos:

a) En el dominio rectangular $0 < x < L$, $0 < y < H$ con condiciones de contorno $G = 0$ en $x = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial x} = 0$ en $x = L$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 0$ en $y = 0$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 0$ en $y = H$. En la ecuación diferencial $\boldsymbol{x} \equiv (x, y)$ y $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_x, \alpha_y)$.

b) En el dominio semicircular $0 < r < R$, $0 < \theta < \pi$ siendo $G = 0$ en todos los puntos del contorno. En la ecuación diferencial $\boldsymbol{x} \equiv (r, \theta)$ y $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_r, \alpha_\theta)$.

---

**Solución 4.a** Obtendremos la función de Green por desarrollo en funciones propias como $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_\lambda a_\lambda \Phi(\boldsymbol{x})$, donde $\boldsymbol{x} = (x, y)$.

El problema de valores propios asociado a $\Delta G = \delta$ es

$$\begin{cases} \Delta\Phi - \lambda\Phi = 0 \\ \Phi = 0 \ \text{ en } \ x = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \ \text{ en } \ x = L \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \ \text{ en } \ y = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \ \text{ en } \ y = H \end{cases}$$

Siendo $\Phi(x, y)$ las funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda$. Se obtienen por separación de variables: $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$, es decir:

$$\begin{cases} X''Y + XY'' - \lambda XY = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \\ Y'(0) = Y'(H) = 0 \end{cases}$$

que se reduce a los dos problemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{X''}{X} = \widetilde{\lambda} \\[2ex] X(0) = 0 \\[2ex] X'(L) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \widetilde{\lambda}_n = -\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}; \ n \in \mathbb{N} \\[4ex] X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\right); \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{Y''}{Y} = \lambda - \widetilde{\lambda} \\[2ex] Y'(0) = 0 \\[2ex] Y'(H) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_{mn} = -\dfrac{m^2\pi^2}{H^2} - \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}; \ n \in \mathbb{N}, \, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\[4ex] Y_m(y) = \cos\left(\dfrac{m\pi y}{H}\right); \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

En resumen, las funciones propias $\Phi(\boldsymbol{x})$ son:

$$\Phi_{mn}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{H}\right);\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Por tanto, la función de Green se puede escribir como:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\lambda} a_\lambda \Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Phi_{mn}(x,y)$$

donde los coeficientes $a_{mn}$ deben ser tales que se verifique $\Delta G = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})$, esto es:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Delta\Phi_{mn}(x,y) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})$$

Dado que se verifica $\Delta\Phi_{mn} = \lambda_{mn}\Phi_{mn}$, entonces:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\lambda_{mn}\Phi_{mn}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}) \Longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\lambda_{mn}\Phi_{mn}(\boldsymbol{x})\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})\Phi_{ij}(\boldsymbol{x})$$

Si a continuación se integra sobre el dominio del problema, se obtiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\lambda_{mn}\underbrace{\int_0^L\int_0^H \Phi_{mn}(\boldsymbol{x})\Phi_{ij}(\boldsymbol{x})dxdy}_{=0 \text{ si } (m,n)\neq(i,j)} = \underbrace{\int_0^L\int_0^H \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})\Phi_{ij}(\boldsymbol{x})dxdy}_{=\Phi_{ij}(\boldsymbol{\alpha})}$$

Resultando:

$$\lambda_{ij}a_{ij}\int_0^L\int_0^H \Phi_{ij}^2(\boldsymbol{x})dxdy = \Phi_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) \Longrightarrow a_{ij} = \frac{1}{\lambda_{ij}}\frac{\Phi_{ij}(\alpha)}{\displaystyle\int_0^L\int_0^H \Phi_{ij}(x,y)dxdy};\ j \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

En definitiva, la función de Green es:

$$\boxed{\begin{aligned} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_{mn}(\alpha)}{\lambda_{mn}\displaystyle\int_0^L\int_0^H \Phi_{mn}^2(x,y)dxdy}\Phi_{mn}(\boldsymbol{x}) \\ \lambda_{mn} &= -\frac{m^2\pi^2}{H^2} - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} \\ \Phi_{mn}(x,y) &= \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{H}\right)\end{aligned}}$$

---

**Solución 4.b** El problema de valores propios asociado es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \lambda \Phi = 0 \\ \Phi(R,\theta) = 0 \\ \Phi(r,0) = 0 \\ \Phi(r,\pi) = 0 \end{cases}$$

Si buscamos una solución en variables separadas del tipo $\Phi(r,\theta) = \Psi(r)\Theta(\theta)$, obtenemos los dos problemas siguientes:

$$\Theta'' + \widetilde{\lambda}\Theta = 0; \;\; \Theta(0) = 0 \;\; \Theta(\pi) = 0$$
$$r^2\Psi'' + r\Psi' - (\widetilde{\lambda} + \lambda r^2)\Psi = 0; \;\; \Psi(R) = 0 \;\; \Psi(0) \quad \text{acotado}$$

El primero de los problemas tiene como solución las funciones propias $\Theta_n(\theta) = \operatorname{sen}(n\theta)$ con los valores propios asociados $\widetilde{\lambda}_n = n^2;\; n \in \mathbb{N}$

La ecuación $r^2\Psi'' + r\Psi' + (-\lambda r^2 - n^2)\Psi = 0$ es una EDO de Bessel. Así:

• Si $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$ y el cambio de variable $z = \mu r$ conduce a la ecuación

$$z^2\ddot{\Psi} + z\dot{\Psi} - (z^2 + n^2)\Psi = 0$$

que es una ecuación de Bessel modificada de orden $n$, cuya solución general es $\Psi(z) = C_1 I_n(z) + C_2 K_n(z)$ y, por tanto, $\Psi(r) = C_1 I_n(\mu r) + C_2 K_n(\mu r)$. Cuando $r \to 0$, $I_n(r)$ se mantiene acotado, mientras que $K_n(r) \to \infty$, por tanto $C_2 = 0$. Además, la condición de contorno $\Psi(R) = 0$ implica $C_1 = 0$, ya que $I_n$ no tiene raíces positivas. En consecuencia no existen funciones propias si $\lambda > 0$.

• Si $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$ y el cambio de variable $z = \mu r$ conduce a la ecuación

$$z^2\ddot{\Psi} + z\dot{\Psi} + (z^2 - n^2)\Psi = 0$$

que es una ecuación de Bessel de orden $n$, cuya solución general es $\Psi(z) = C_1 J_n(z) + C_2 Y_n(z)$ y, por tanto, $\Psi(r) = C_1 J_n(\mu r) + C_2 Y_n(\mu r)$. Cuando $r \to 0$, $J_n(r)$ se mantiene acotado, mientras que $Y_n(r) \to \infty$, por tanto $C_2 = 0$. La condición de contorno $\Psi(R) = 0$ proporciona una ecuación de valores propios, ya que se debe cumplir $J_n(\mu R) = 0$. Así, si llamamos $\nu_{mn};\; m \in \mathbb{N}$ a las raíces de de la función de Bessel de primera clase de orden $n$, entonces, $\mu_m = \nu_{mn}/R;\; m \in \mathbb{N}$. Por tanto, las funciones propias y los valores propios son:

$$\Psi_m = J_n\left(\nu_{mn}\frac{r}{R}\right) \quad \text{con} \quad \lambda_{mn} = -\frac{\nu_{mn}^2}{R^2};\; m,n \in \mathbb{N}$$

• Si $\lambda = 0$ se obtiene la ecuación de

$$r^2\Psi'' + r\Psi' - n^2\Psi = 0$$

que es una EDO de Euler-Cauchy. La solución es de la forma $\Psi(r) = r^p$, por lo que $p$ debe verificar la relación $p^2 - n^2 = 0$, esto es, $p = \pm n;\; n \in \mathbb{N}$. La solución general es $\Psi(r) = C_1 r^n + C_2/r^n$. Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene $C_1 = C_2 = 0$, por lo que no existen funciones propias asociadas al autovalor nulo.

En resumen, las funciones propias $\Phi(r,\theta)$ son:

$$\Phi_{mn}(r,\theta) = J_n\left(\nu_{mn}\frac{r}{R}\right)\operatorname{sen}(n\theta);\ n,m \in \mathbb{N}$$

La función de Green se obtiene como $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}\Phi_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ siendo $\boldsymbol{x} = (r,\theta)$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_r, \alpha_\theta)$. Dado que se tiene que cumplir $\Delta G = \delta$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Delta\Phi_{mn}(r,\theta) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})$$

Además, se verifica $\Delta\Phi_{mn} = \lambda_{mn}\Phi_{mn}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mn}a_{mn}\Phi_{mn}(r,\theta) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mn}a_{mn}\int_0^R\int_0^{\pi} r\Phi_{mn}(r,\theta)\Phi_{ij}(r,\theta)d\theta dr = \int_0^R\int_0^{\pi} r\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})\Phi_{ij}(r,\theta)d\theta dr$$

ya que las funciones $J_n$ son ortogonales con respecto a $r$. Así,

$$a_{ij} = -\frac{\alpha_r R^2}{\nu_{ij}^2}\frac{\Phi_{ij}(\alpha_r,\alpha_\theta)}{\displaystyle\int_0^R\int_0^{\pi} r\Phi_{ij}^2(r,\theta)d\theta dr}$$

y la función de Green es

$$\boxed{G(r,\theta;\alpha_r,\alpha_\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{\alpha_r R^2}{\nu_{mn}^2}\frac{\Phi_{mn}(\alpha_r,\alpha_\theta)}{\displaystyle\int_0^R\int_0^{\pi} r\Phi_{mn}^2(r,\theta)d\theta dr}\Phi_{mn}(r,\theta)\right]}$$

---

**5.–** Se desea estudiar la distribución de temperaturas de un barra metálica de sección transversal constante aislada lateralmente dadas distintas distribuciones iniciales de temperaturas, para distintos tipos de aislantes en los extremos de modo que los flujos de calor que fluyen por ellos son variables en función del tiempo, esto es:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \phi_0(t), \quad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \phi_L(t), \quad t \geq 0; \qquad T(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.\end{gathered} \tag{1}$$

Obtener la función de influencia $N(x,s,t)$ o "función de Neumann", de modo que la solución al problema (1) con condiciones de contorno homogéneas (denomínese $u(x,t)$) se pueda expresar en la forma integral:

$$u(x,t) = \int_0^L f(s)\, N(x,s,t)\, ds.$$

Resolver el problema (1), expresando su solución $T(x,t)$ en forma integral dependiente de la función de Neumann, de $f(x)$ y de $\phi_0(t)$ y $\phi_L(t)$.

(Nota: Las funciones $f(x)$, $\phi_0(t)$ y $\phi_L(t)$ son continuas en los respectivos dominios.)

---

**Solución 5.** En primer lugar nos planteamos el problema homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ 0 \le x \le L;\ t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0;\ u(x,0) = f(x)$$

Partimos de una solución en variables separadas del tipo $u(x,t) = \Phi(x)T(t)$. Introduciendo esta solución en el problema homogéneo, obtenemos

$$\begin{cases} \Phi'' - \lambda\Phi = 0;\ \ \Phi'(0) = \Phi'(L) = 0 \\ T' = \lambda k T \end{cases}$$

Para resolver el problema de contorno distinguimos tres situaciones:

• Si $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$ y $\Phi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene $A = B = 0$, por lo que no existen funciones propias en este caso.

• Si $\lambda = 0$, $\Phi(x) = A + Bx$. Las condiciones de contorno se verifican para cualquier valor de $A$ si $B = 0$, por lo que $\Phi_0(x) = 1$ es una función propia asociada al autovalor nulo.

• Si $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$ y $\Phi(x) = A\,\mathrm{sen}(\mu x) + B\,\mathrm{sen}(\mu x)$. Para que se satisfaga la condición $\Phi'(0) = 0$, es necesario que $A = 0$. La condición $\Phi'(L) = 0$ se satisface siempre que $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$; $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, las funciones propias son $\Phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L})$

Las funciones $T_0$ y $T_n$ asociadas a los autovalores anteriores se obtienen fácilmente de la EDO $T_j' = \lambda_j k T_j;\ j \in \mathbb{N}$. Procediendo de este modo, resulta $T_0(t) = A_0$ y $T_n(t) = A_n e^{-k\mu_n^2 t}$, por lo que la solución del problema homogéneo toma la forma:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\mu_n^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Si imponemos la condición inicial se llega a la relación

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

que proporciona

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(s)ds; \; A_m = \frac{\displaystyle\int_0^L f(s)\cos\left(\frac{m\pi s}{L}\right)ds}{\displaystyle\int_0^L \cos^2\left(\frac{m\pi s}{L}\right)ds} = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos\left(\frac{m\pi s}{L}\right)ds$$

Si se substituyen los coeficientes $A_0$ y $A_m$ se obtiene la solución en serie de Fourier

$$u(x,t) = \int_0^L f(s)\left\{\frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}\right]\right\}ds$$

En conclusión, la función de influencia de este problema es

$$\boxed{N(x,s,t) = \frac{1}{L}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}\right]\right\}}$$

que es simétrica en cualquier instante ($N(x,s,t) = N(s,x,t)\ \forall t$) y verifica las condiciones de contorno del problema homogeneizado.

Para obtener la solución del problema no homogéneo comenzamos por homogeneizar las condiciones de contorno. Para ello escribimos la solución $v(x,t)$ como la suma $v(x,t) = w(x,t) + r(x,t)$, de modo que $r(x,t)$ verifique $\frac{\partial r}{\partial x}(0,t) = \Phi_0(t)$; $\frac{\partial r}{\partial x}(L,t) = \Phi_L(t)$. Una función que verifica estas condiciones es, por ejemplo, la primitiva de la relación lineal entre $\Phi_0$ y $\Phi_L$. Así, debemos hallar

$$\boxed{v(x,t) = w(x,t) + \Phi_0(t)x + \frac{\Phi_L(t) - \Phi_0(t)}{L}\frac{x^2}{2}}$$

que verifique el problema anterior, es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\dfrac{\Phi_L(t)-\Phi_0(t)}{L} - \Phi'(t)x - \dfrac{\Phi'_L(t)-\Phi'_0(t)}{L}\dfrac{x^2}{2}}_{F(x,t)} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0; \; \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \\ w(x,0) = \underbrace{f(x) - \Phi_0(0)x - \dfrac{\Phi_L(0)-\Phi_0(0)}{L}\dfrac{x^2}{2}}_{\widetilde{f}(x)} \end{cases}$$

El nuevo problema a resolver tiene las condiciones de contorno homogéneas, por lo que se puede resolver por desarrollo en funciones propias del problema homogéneo, es decir, asumiendo que existe

$$w(x,t) = w_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y desarrollando $F(x,t)$

$$F(x,t) = F_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad \begin{cases} F_0(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L F(s,t)ds \\ F_n(t) = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L F(s,t)\cos\left(\dfrac{n\pi s}{L}\right) ds \end{cases}$$

Calculando ahora las derivadas $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ de la serie en cosenos y substituyendo, se obtiene:

$$\left(\frac{dw_0}{dt} - F_0(t)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dw_n}{dt} + k\frac{n^2\pi^2}{L^2}w_n - F_n(t)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

La anterior ecuación se verificará $\forall x$ si se cumplen las igualdades:

$$\frac{dw_0}{dt} - F_0(t) = 0 \Longrightarrow w_0(t) = \int_0^t F_0(\tau)d\tau + \varphi_0$$

$$\frac{dw_n}{dt} + k\frac{n^2\pi^2}{L^2} - F_n(t) = 0;\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow w_n(t) = e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\left[\varphi_n + \int_0^t e^{k\frac{n^2\pi^2}{L^2}\tau}F_n(\tau)d\tau\right]$$

Las constantes $\varphi_0$ y $\varphi_n$ se obtienen de los desarrollos en serie de la condición inicial. Así,

$$w(x,0) = \widetilde{f}(x) \Longrightarrow w(x,0) = w_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \widetilde{f}(x)$$

por lo que

$$w_0(0) = \frac{1}{L}\int_0^L \widetilde{f}(s)ds;\ w_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(s)\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds$$

y si evaluamos las expresiones anteriores en $t = 0$ se obtiene $\varphi_0 = w_0(0)$ y $\varphi_n = w_n(0)$

Substituyendo los valores de $\varphi_0$, $\varphi_n$, $w_0(t)$ y $w_n(t)$ en la serie $w(x,t)$ y reordenando términos, se obtiene:

$$w(x,t) = \int_0^L \widetilde{f}(s)\left\{\frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\right]\right\}ds +$$

$$+\int_0^t\int_0^L F(s,\tau)\left\{\frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}(t-\tau)}\right]\right\}dsd\tau$$

Por tanto,

$$\boxed{w(x,t) = \int_0^L \widetilde{f}(s) N(x,s,t)\,ds + \int_0^t \int_0^L F(s,\tau) N(x,s,t-\tau)\,ds\,d\tau}$$