$$\boxed{v(r,t) = v_E(r) + u(r,t)} \tag{8.2}$$

El problema de equilibrio consistirá en obtener la función $v_E(r)$ que satisface:

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_E}{dr}\right) + \frac{\Delta p}{L} = 0, \quad 0 < r < R; \qquad v_E(0) \ \text{finita}; \quad v_E(R) = 0 \tag{8.3}$$

La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria es $v_E(r) = -\frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{r^2}{2} + A_1 \ln r + A_2$, y los coeficientes A_1 y A_2 se obtienen de aplicar la condición de contorno en $r = R$ y la condición de singularidad en el origen, con lo que:

$$\boxed{v_E(r) = \frac{\Delta p\, R^2}{4\mu L}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} \tag{8.4}$$

En consecuencia, si se sustituye $v(r,t)$ de acuerdo con la separación (8.2) en las ecuaciones del problema (8.1) y se tiene en cuenta que $v_E(r)$ satisface el problema (8.3), la función $u(r,t)$ que rige el estado transitorio se obtiene de resolver

$$\boxed{\begin{array}{c} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad 0 < r < R, \quad t > 0 \\ u(0,t) \ \text{finita}; \qquad u(R,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(r,0) = -v_E(r), \quad 0 < r < R \end{array}} \tag{8.5}$$

Este problema está formado por una ecuación en derivadas parciales y una condición de contorno lineales y homogéneas, y una condición de singularidad en el origen, por lo que se puede plantear su resolución por Separación de Variables, esto es:

$$u(r,t) = \phi(r)T(t) \tag{8.6}$$

de modo que al sustituir en la ecuación diferencial de (8.5) resulta:

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{T'}{T} = \frac{1}{\phi\, r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) \equiv \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{cases} T' - \lambda\dfrac{\mu}{\rho}T = 0 \\ \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\phi}{dr}\right) - \lambda r\phi = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

siendo λ la constante de separación.

Asimismo se puede separar la condición de contorno en $r = R$ dada por $u(R,t) = 0$ en la forma $\phi(R) = 0$. Por lo que respecta a la condición de singularidad en el origen, la velocidad del fluido será finita en todos los puntos y en particular en $r = 0$, si para cualquier función $T(t)$ acotada, la función $\phi(0)$ está acotada.

En consecuencia, las funciones propias se obtendrán de estudiar las soluciones no triviales del problema de contorno

$$r\phi'' + \phi' - \lambda r\phi = 0; \quad \phi(0) \text{ acotada}, \quad \phi(R) = 0 \tag{8.8}$$

Como es sabido, este problema únicamente tiene funciones propias asociadas a autovalores negativos, dados por $\lambda = -\nu_n^2/R^2$ siendo $\{\nu_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, el conjunto infinito de las raíces de la función de Bessel de Primera Clase de orden 0, es decir,

$$\boxed{J_0(\nu_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{8.9}$$

Las funciones propias asociadas a estos autovalores son $\phi_n(r) = J_0(\nu_n r/R)$.

Una vez obtenidos los valores propios λ se puede resolver la ecuación en la variable tiempo de (8.7)

$$T' + \alpha_n T = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-\alpha_n t}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.10}$$

siendo α_n el coeficiente positivo

$$\boxed{\alpha_n = \frac{\nu_n^2 \mu}{R^2 \rho}, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{8.11}$$

Por tanto la solución de (8.5) es la Serie Generalizada de Fourier de funciones de Bessel

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, J_0\left(\frac{\nu_n r}{R}\right)\, e^{-\alpha_n t}} \tag{8.12}$$

si se satisface además la condición inicial $u(r,0) = -v_E(r)$. Se puede comprobar fácilmente que esta Serie de Generalizada de Fourier verifica la ecuación en derivadas parciales, cumple la condición de contorno de tipo Dirichlet y la condición de singularidad establecidas en (8.5).

Si se impone que se verifique la condición inicial $u(r,0) = -v_E(r)$, entonces los coeficientes C_n deben ser tales que se verifique la identidad:

$$-v_E(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, J_0\left(\frac{\nu_n r}{R}\right) \tag{8.13}$$

siendo $v_E(r)$ la solución de equilibrio dada por (8.4). Teniendo en cuenta que el conjunto de funciones propias es ortogonal respecto de r en $(0,R)$, se debe satisfacer

$$-\int_0^R s\, v_E(s)\, J_0\left(\frac{\nu_n s}{R}\right)\, ds = C_n \int_0^R s\, J_0^2\left(\frac{\nu_n s}{R}\right)\, ds, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{8.14}$$

En consecuencia los coeficientes C_n vienen dados por

$$\boxed{C_n = \frac{-\Delta p\, R^2}{4\mu L} \frac{\displaystyle\int_0^R s\left(1-\left(\frac{s}{R}\right)^2\right) J_0\left(\frac{\nu_n s}{R}\right) ds}{\displaystyle\int_0^R s\, J_0^2\left(\frac{\nu_n s}{R}\right) ds}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{8.15}$$

Finalmente si se tienen en cuenta el valor de las siguientes integrales

$$\int_0^1 z\left(1-z^2\right) J_0(\nu_n z) dz = \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} - \frac{(\nu_n^2-4)\, J_1(\nu_n)}{\nu_n^3} = \frac{4\, J_1(\nu_n)}{\nu_n^3} \tag{8.16}$$

$$\int_0^1 z\, J_0^2(\nu_n z)\, dz = \left[\frac{z^2}{2}\left((J_0'(\nu_n z))^2 + (J_0(\nu_n z))^2\right)\right]_0^1 = \frac{(J_0'(\nu_n))^2}{2} = \frac{J_1^2(\nu_n)}{2} \tag{8.17}$$

entonces el coeficiente C_n resulta ser

$$C_n = \frac{-\Delta p\, R^2}{4\mu L} \frac{\displaystyle\int_0^1 z\left(1-z^2\right) J_0(\nu_n z)\, dz}{\displaystyle\int_0^1 z\, J_0^2(\nu_n z)\, dz} = \frac{-2\Delta p\, R^2}{\nu_n^3 \mu L\, J_1(\nu_n)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{8.18}$$

En resumen, la velocidad del fluido $u(r,t)$ en el interior de la tubería en cada coordenada radial r e instante de tiempo t es

$$\boxed{u(r,t) = \frac{\Delta p\, R^2}{4\mu L}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\nu_n r/R\right)}{\nu_n^3\, J_1(\nu_n)}\, e^{-\alpha_n t}\right)} \tag{8.19}$$

siendo $\alpha_n = \dfrac{\nu_n^2 \mu}{R^2 \rho}$, y $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las raíces de la función J_0 de Bessel.

9.– Unas bolas esféricas de combustible de radio R generan una cantidad de calor constante Q por unidad de volumen y unidad de tiempo. A la vez, su contorno es enfriado por un fluido refrigerante, de modo que el flujo en el contorno es proporcional —según una constante h que mide la transferencia de calor combustible/fluido— a la diferencia entre la temperatura en el contorno y la temperatura del fluido —asumida constante e igual a T_F—.

Si se denomina k a la conductividad térmica del combustible, ρ a su densidad y C_p a su capacidad calorífica (asumidas constantes), la distribución de la temperatura $T(r,t)$ en una de las esferas en cualquier punto radial r e instante t satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{k}{\rho C_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{Q}{\rho C_p}, \quad 0 < r < R, \quad t > 0; \\ \frac{\partial T(R,t)}{\partial r} &= -\frac{h}{k}\left(T(R,t) - T_F\right), \quad t \geq 0; \\ T(r,0) &= T_0, \quad 0 \leq r \leq R; \end{aligned} \tag{9.1}$$

siendo T_0 (constante) la distribución inicial de temperaturas en la esfera. Resolver el problema de contorno anterior y obtener la distribución de temperaturas $T(r,t)$.

Solución 9. En primer lugar es imprescindible introducir una condición de singularidad en este problema dado que la ecuación en derivadas parciales no está definida para $r = 0$. Esta condición establece que la solución $T(r,t)$ debe estar acotada cuando $r \to 0$ en todo instante t.

El problema planteado es no homogéneo debido a la presencia del término $\dfrac{Q}{\rho C_p}$ en el segundo miembro de la ecuación diferencial. Así, se puede plantear hallar la solución $T(r,t)$ como la suma de una solución de equilibrio $T_E(r)$ (caso de que exista) y una función $u(r,t)$ correspondiente a los estados transitorios, de modo que

$$\boxed{T(r,t) = T_E(r) + u(r,t)} \tag{9.2}$$

El problema de equilibrio consiste en hallar la función $T_E(r)$ que satisface:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT_E}{dr}\right)+\frac{Q}{k}=0,\ \ 0<r<R; \qquad \frac{d\,T_E(R)}{dr}+\frac{h}{k}\left(T_E(R)-T_F\right)=0, \quad T_E(r)\ \text{ acotada }\ r\to 0 \tag{9.3}$$

La solución general de esta EDO es $T_E(r) = -\dfrac{Q}{k}\dfrac{r^2}{6} - \dfrac{A_2}{r} + A_1$, cuyos coeficientes se obtienen de aplicar la condición de contorno en $r = R$ y la condición de singularidad en el origen, con lo que:

$$\boxed{T_E(r) = T_F + \frac{Q\,R}{3h} + \frac{Q\,R^2}{6k}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} \tag{9.4}$$

En consecuencia, si se sustituye $T(r,t)$ según (9.2) en las ecuaciones del problema (9.1) y se tiene en cuenta que $T_E(r)$ satisface el problema (9.3), la función $u(r,t)$ que gobierna el estado transitorio del transporte de calor se obtiene de resolver

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{\rho C_p}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad 0<r<R, \quad t>0\\ \frac{\partial u(R,t)}{\partial r}+\frac{h}{k}u(R,t)=0, \quad t\geq 0; \quad u(r,t)\ \text{ acotada }\ r\to 0, \quad t\geq 0\\ u(r,0)=T_0-T_E(r), \quad 0\leq r\leq R\end{gathered}} \tag{9.5}$$

Este problema está formado por una ecuación en derivadas parciales y una condición de contorno lineales y homogéneas, y una condición de singularidad en el origen, por lo que se puede plantear su resolución por Separación de Variables, esto es:

$$u(r,t) = \phi(r)\Psi(t) \tag{9.6}$$

de modo que al sustituir en la ecuación diferencial de (9.5) resulta:

$$\frac{\rho C_p}{k}\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{1}{\phi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) \equiv \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Psi' - \lambda\dfrac{k}{\rho C_p}\Psi = 0 \\ \\ \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d\phi}{dr}\right) - \lambda r^2\phi = 0 \end{cases} \tag{9.7}$$

siendo λ la constante de separación. Por otra parte, la separación de la condición de contorno mixta conduce a que $\forall\Psi(t)$ se debe cumplir

$$\frac{d\phi(R)}{dr} + \frac{h}{k}\phi(R) = 0 \tag{9.8}$$

y la condición de singularidad en el origen de la función $u(r,t)$ se traduce en que $\forall\Psi(t)$ la función $\phi(r)$ debe estar acotada cuando $r \to 0$.

En consecuencia, las funciones propias $\phi(r)$ resultan de resolver el problema de Sturm-Liouville singular:

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) - \lambda r^2\phi = 0; \qquad \frac{d\phi(R)}{dr} + \frac{h}{k}\phi(R) = 0; \qquad \phi(r) \ \text{acotada} \ r \to 0} \tag{9.9}$$

Debe tenerse presente que las funciones propias que se obtengan serán **ortogonales** en el dominio $0 < r < R$ respecto a la función r^2 (que es el factor que multiplica a λ en (9.9)).

Para valores propios positivos, esto es $\lambda = +\mu^2$, la EDO del problema de Sturm-Liouville es

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) - \mu^2 r^2\phi = 0 \tag{9.10}$$

que se puede transformar en una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes mediante el cambio de función $w = r\,\phi$, ya que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right) = \frac{-w}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}; \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = r\frac{d^2w}{dr^2} \tag{9.11}$$

de modo que la ecuación (9.10) se reduce a

$$r\left(\frac{d^2w}{dr^2} - \mu^2 w\right) = 0 \qquad 0 < r < R \tag{9.12}$$

En consecuencia, su solución general es $w(r) = Ce^{+\mu r} + De^{-\mu r}$, por lo que deshaciendo el cambio $w = r\,\phi$, se obtiene la solución general de (9.10):

$$\phi(r) = C\frac{e^{+\mu r}}{r} + D\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{9.13}$$

Si ahora se imponen la condición de contorno de tipo mixto de (9.9) así como la condición de singularidad, se concluye que la única solución posible es la solución trivial, por lo que no existen funciones propias asociadas a valores propios positivos.

Para valores propios nulos, esto es $\lambda = 0$, la EDO del problema de Sturm-Liouville es

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \tag{9.14}$$

cuya solución general es $\phi(r) = C - D/r$, a la que si ahora se impone la condición de contorno de tipo mixto de (9.9) y la de singularidad, se concluye que la única solución posible es $C = D = 0$, por lo que no existen funciones propias asociadas a valores propios nulos.

Para valores propios negativos, esto es $\lambda = -\mu^2$, la EDO del problema de Sturm-Liouville es

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) + \mu^2 r^2\phi = 0 \tag{9.15}$$

que se puede transformar en una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes de nuevo mediante el cambio de función $w = r\,\phi$ como en (9.10), resultando

$$r\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu^2 w\right) = 0 \qquad 0 < r < R \tag{9.16}$$

En consecuencia, su solución general es $w(r) = C\sin(\mu r) + D\cos(\mu r)$, por lo que deshaciendo el cambio, se obtiene la solución general de (9.15):

$$\phi(r) = C\frac{\sin(\mu r)}{r} + D\frac{\cos(\mu r)}{r} \tag{9.17}$$

Por otra parte, cuando $r \to 0$, la función $\dfrac{\sin(\mu r)}{r} \to 1$ (es decir está acotada) y dado que $\cos(\mu r) \to 1$, para que la solución $\phi(r)$ esté acotada, el coeficiente D debe ser nulo ($D = 0$).

La aplicación de la condición de contorno de tipo mixto de (9.9) conduce a la ecuación algebraica

$$(\mu R) - \left(1 - \frac{hR}{k}\right)\tan(\mu R) = 0 \tag{9.18}$$

En consecuencia el espectro de valores propios $\lambda_n = -\mu_n^2$ se obtienen de las infinitas raíces de la ecuación

$$\boxed{\tan(\mu_n R) = \frac{\mu_n R}{\left(1 - \dfrac{hR}{k}\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}} \tag{9.19}$$

cuyas funciones propias asociadas son el conjunto $\phi_n(r) = \dfrac{\sin(\mu_n r)}{r}$ para $n \in \mathbb{N}$, que como ya se ha dicho anteriormente es ortogonal respecto de r^2 en $(0, R)$.

Una vez obtenidos los valores propios λ se puede resolver la ecuación en la variable tiempo de (9.7)

$$\Psi' + \mu_n^2\frac{k}{\rho C_p}\Psi = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad \Psi_n(t) = \widetilde{C}_n e^{-\frac{k\mu_n^2}{\rho C_p}t}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{9.20}$$

Por tanto la solución de (9.5) es la Serie Generalizada de Fourier $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r)\Psi_n(t)$, que viene dada por

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{C}_n \frac{\sin(\mu_n r)}{r} e^{-\frac{k\mu_n^2}{\rho C_p}t}} \tag{9.21}$$

Se puede comprobar fácilmente que esta Serie de Generalizada de Fourier verifica la ecuación en derivadas parciales, cumple la condición de contorno mixta y la condición de singularidad dadas en (9.5).

Si se impone que se verifique la condición inicial $u(r,0) = T_0 - T_E(r)$, entonces los coeficientes $\widetilde{C}_n$ deben ser tales que se cumpla:

$$T_0 - T_E(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{C}_n \frac{\operatorname{sen}(\mu_n r)}{r} \tag{9.22}$$

siendo $T_E(r)$ la solución de equilibrio dada por (9.4). Teniendo en cuenta que el conjunto de funciones propias es ortogonal respecto de r^2 en $(0,r)$ debe verificarse

$$\int_0^R s^2 (T_0 - T_E(s)) \frac{\operatorname{sen}(\mu_n s)}{s}\, ds = \widetilde{C}_n \int_0^R s^2 \left(\frac{\operatorname{sen}(\mu_n s)}{s}\right)^2 ds, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{9.23}$$

En consecuencia los coeficientes $\widetilde{C}_n$ vienen dados por

$$\boxed{\widetilde{C}_n = \frac{\displaystyle\int_0^R s(T_0 - T_E(s)) \operatorname{sen}(\mu_n s)\, ds}{\displaystyle\int_0^R \operatorname{sen}^2(\mu_n s)\, ds}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{9.24}$$

La integral del denominador debe evaluarse calculando previamente la primitiva y seguidamente aplicar la regla de Barrow, esto es:

$$\begin{aligned} \int_0^R \operatorname{sen}^2(\mu_n s)\, ds &= \frac{1}{\mu_n}\int_0^{\mu_n R} \operatorname{sen}^2(z)\, dz = \frac{1}{2\mu_n}\Big[z - \operatorname{sen}(z)\cos(z)\Big]_0^{\mu_n R} = \\ &= \frac{1}{2\mu_n}\left[\mu_n R - \frac{\tan(\mu_n R)}{1+\tan^2(\mu_n R)}\right] = \frac{R}{2}\left[1 - \frac{1}{(1-hR/k)^2 + (\mu_n R)^2}\right] \end{aligned} \tag{9.25}$$

donde se ha hecho uso de la expresión para el cálculo de μ_n dada por la ecuación (9.19).

En resumen, la distribución de temperaturas $T(r,t)$ en las esferas de combustible es

$$\boxed{T(r,t) = T_F + \frac{Q\,R}{3h} + \frac{Q\,R^2}{6k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{C}_n \frac{\operatorname{sen}(\mu_n r)}{r} e^{-\frac{k\mu_n^2}{\rho C_p}t}} \tag{9.26}$$

y el coeficiente $\widetilde{C}_n$ se calcula según (9.24).

10.– Se desea estudiar el problema de vibraciones forzadas de una cuerda tensada sometida a un desplazamiento inicial conocido, y a una fuerza que actúa a lo largo de toda su longitud y que depende del tiempo. Un modelo matemático sencillo de este fenómeno, en el que no se tiene en cuenta efectos de fricción, vendría dado por la ecuación de ondas con las condiciones iniciales y de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t), \quad 0 < x < L; \\ u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Obtener la expresión de los desplazamientos verticales de la cuerda en cualquier instante de tiempo mediante el desarrollo en funciones propias del problema homogéneo, siendo $Q(x,t) = g(x)\cos\omega t$. ¿Para qué valores de la frecuencia ω se produce resonancia en el sistema?

Solución 10. En primer lugar, obtendremos las funciones propias a partir del problema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L; \\ w(0,t) &= 0, \quad w(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Si realizamos la separación de variables en la forma $w(x,t) = \phi(x)T(t)$, el problema de contorno que da lugar a las funciones propias es:

$$\begin{aligned} &\Phi'' - \lambda\Phi = 0, \quad 0 < x < L; \\ &\Phi(0) = 0, \quad \Phi(L) = 0 \end{aligned} \tag{10.2}$$

Las funciones propias que resultan del problema (10.2) son

$$\boxed{\Phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad n \in \mathbb{N}} \tag{10.3}$$

y los valores propios

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}; \quad n \in \mathbb{N} \tag{10.4}$$

El problema original se puede resolver ahora en términos de desarrollos en funciones propias:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Phi_n(x)} \tag{10.5}$$

La función $Q(x,t)$ desarrollada en serie es:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\Phi_n(x) \quad \text{siendo} \quad q_n(t) = \frac{(Q(x,t),\Phi_n(x))}{(\Phi_n(x),\Phi_n(x))} \tag{10.6}$$

Mediante integración directa se obtiene,

$$q_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L Q(s,t)\Phi_n(s)ds \tag{10.7}$$

En este caso, dado que $Q(x,t) = g(x)\cos(\omega t)$, entonces

$$q_n(t) = q_n\cos(\omega t); \quad q_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(s)\Phi_n(s)ds \tag{10.8}$$

Substituyendo las series de funciones propias de $u(x,t)$ y $Q(x,t)$ en la EDP original, resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}u_n - q_n\cos(\omega t)\right)\Phi_n(x) = 0;\ 0 < x < L \tag{10.9}$$

que se verifica $\forall x \in (0,L)$ si los coeficientes $u_n(t)$ satisfacen la ecuación diferencial ordinaria

$$u_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}u_n = q_n\cos(\omega t);\ n \in \mathbb{N} \tag{10.10}$$

Si se denominan $\alpha_n = \frac{n\pi c}{L}$ las frecuencias naturales del sistema, la solución general (suma de la solución general de la EDO homogénea y una solución particular) es

$$\boxed{u_n(t) = C_n\,\mathrm{sen}(\alpha_n t) + D_n\cos(\alpha_n t) + \begin{cases} \dfrac{q_n}{\alpha_n^2 - \omega^2}\cos(\omega t), & \omega \neq \alpha_n \\ \dfrac{q_n}{2\alpha_n}t\,\mathrm{sen}(\alpha_n t), & \omega = \alpha_n \end{cases}} \tag{10.11}$$

El caso en que la frecuencia de excitación de la fuerza externa coincide con alguna de las frecuencia naturales de vibración de la cuerda se denomina caso resonante. Los coeficientes C_n y D_n se obtienen del modo usual imponiendo las condiciones iniciales, debiéndose distinguir los casos no resonantes de los casos resonantes. Por ello, la condición $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ implica

$$\left[\alpha_n C_n\cos(\alpha_n t) - \alpha_n D_n\,\mathrm{sen}(\alpha_n t) + \begin{cases} \dfrac{-q_n\omega}{\alpha_n^2-\omega^2}\mathrm{sen}(\omega t); & \omega \neq \alpha_n \\ \dfrac{q_n}{2\alpha_n}\left(\mathrm{sen}(\alpha_n t) + \alpha_n t\cos(\alpha_n t)\right); & \omega = \alpha_n \end{cases}\right]_{t=0} = 0 \tag{10.12}$$

que se traduce en

$$\boxed{C_n = 0; \quad n \in \mathbb{N}.} \tag{10.13}$$

La condición inicial en desplazamientos exige que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_n+\begin{cases}\dfrac{q_n}{\alpha_n^2-\omega^2}; & \omega\neq\alpha_n\\ 0; & \omega=\alpha_n\end{cases}\right]\Phi_n(x) \tag{10.14}$$

En consecuencia

$$\boxed{D_n=\begin{cases}-\dfrac{q_n}{\alpha_n^2-\omega^2}+\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\Phi_n(s)ds; & \omega\neq\alpha_n\\ \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\Phi_n(s)ds; & \omega=\alpha_n\end{cases}\quad ;\quad n\in\mathbb{N}} \tag{10.15}$$

Y la solución viene dada por (10.5) siendo (10.3) las funciones propias y $u_n(t)$ las funciones definidas en (10.11). Los coeficientes C_n y D_n se obtienen, respectivamente, de (10.13) y (10.15).

11.– La distribución de los niveles de voltaje $V(x,t)$ de la corriente eléctrica que circula por un cable fino de longitud L con autoinducción y conductancia a tierra despreciables se puede modelizar en términos de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\qquad 0<x<L,\quad t>0;\qquad k=\frac{1}{RC},$$

siendo R y C la resistencia eléctrica y la capacitancia del cable por unidad de longitud.

Obtener la expresión del potencial V a lo largo del tiempo y en cualquier punto del cable, si en el extremo $x=0$ se aplica un voltaje variable con el tiempo, e igual a $V(0,t)=\sin t$, y en el extremo $x=L$ el voltaje es nulo. Inicialmente, el potencial en todos los puntos del cable es conocido y viene dado por $V(x,0)=\sin x$.

Solución 11. El problema completo se escribe como

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}=k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0,\quad k>0;\\ &V(0,t)=\operatorname{sen}(t),\quad V(L,t)=0;\quad t\geq 0\\ &V(x,0)=\operatorname{sen}(x)\quad 0<x<L.\end{aligned}$$

Dado que las condiciones de contorno son variables con respecto al tiempo, expresaremos la función $V(x,t)$ en términos de una función de referencia $r(x,t)$ que verifique $r(0,t)=\operatorname{sen}(t)$ y $r(L,t)=0$ de modo que

$$\boxed{V(x,t)=w(x,t)+r(x,t)} \tag{11.1}$$

Una función elemental que verifica estos requisitos es

$$\boxed{r(x,t) = \frac{L-x}{L}\,\mathrm{sen}(t)} \tag{11.2}$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial r}{\partial t} = \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{L-x}{L}\cos(t) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \end{cases} \tag{11.3}$$

Utilizando la expresión (11.1) se comprueba que la función ω debe satisfacer las condiciones de contorno homogéneas $\omega(0,t) = 0$ y $\omega(L,t) = 0$. Del mismo modo, se comprueba que la condición inicial que debe verificar es $\omega(x,0) = \mathrm{sen}(x)$. Asimismo, la ecuación diferencial que verifica ω es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{L-x}{L}\cos(t) \tag{11.4}$$

El problema (11.4) se complementará con condiciones de contorno homogéneas, pero la ecuación diferencial es no homogénea. Por tanto, para resolverla desarrollaremos la solución $\omega(x,t)$ en términos de las funciones propias del siguiente problema homogéneo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t} = k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ &z(0,t) = 0; \quad t \geq 0 \\ &z(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{11.5}$$

Las funciones propias son

$$X_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n \in \mathbb{N} \tag{11.6}$$

Por tanto, plantearemos una solución del tipo

$$\boxed{\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \tag{11.7}$$

Las derivadas temporales de ω resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) a_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \tag{11.8}$$

y desarrollando también en funciones propias el término $Q(x,t) = \dfrac{L-x}{L}\cos(t)$ se obtiene

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11.9}$$

$$q_n(t) = \frac{\cos(t)\displaystyle\int_0^L \frac{L-s}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds}{\displaystyle\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds} = \frac{2}{n\pi}\cos(t) \tag{11.10}$$

Por tanto,

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\cos(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11.11}$$

Substituyendo $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$ y $Q(x,t)$, resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n' + \frac{kn^2\pi^2}{L^2}a_n + \frac{2}{n\pi}\cos(t)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \tag{11.12}$$

que verifica automáticamente las condiciones de contorno homogéneas ya que las verifican las funciones propias. En consecuencia, los coeficientes $a_n(t)$ se obtienen de la ecuación diferencial

$$a_n' + \frac{kn^2\pi^2}{L^2}a_n = -\frac{2}{n\pi}\cos(t) \tag{11.13}$$

cuya solución es

$$a_n(t) = e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}\left[C_n - \frac{2}{n\pi}\int \cos(t)e^{\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}dt\right] \tag{11.14}$$

Tras operar, los coeficientes a_n se pueden escribir del siguiente modo:

$$\boxed{a_n(t) = C_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} - \frac{\frac{2}{n\pi}}{1+(kn^2\pi^2/L^2)^2}\left\{\frac{kn^2\pi^2}{L^2}\cos(t) + \mathrm{sen}(t)\right\};\ n \in \mathbb{N}} \tag{11.15}$$

Las constantes C_n se pueden determinar a partir de $\omega(x,0) = \mathrm{sen}(x)$ dado que

$$\omega(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11.16}$$

siendo

$$a_n(0) = C_n - \underbrace{\frac{\frac{2}{n\pi}(kn^2\pi^2/L^2)}{1+(kn^2\pi^2/L^2)^2}}_{\phi_n} \tag{11.17}$$

En consecuencia,

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n - \phi_n)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11.18}$$

y los coeficientes C_n vienen dados por

$$C_n = \phi_n + \frac{\displaystyle\int_0^L \text{sen}(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L}\right)ds}{\displaystyle\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi s}{L}\right)ds} \tag{11.19}$$

que tras integración directa se escribe como

$$\boxed{C_n = \phi_n + \left\{\frac{\text{sen}(n\pi - L)}{n\pi - L} - \frac{\text{sen}(n\pi + L)}{n\pi + L}\right\};\ n \in \mathbb{N}} \tag{11.20}$$

Por tanto, la solución final viene dada por la expresión (11.7), donde las funciones $a_n(t)$ se obtienen de (11.15) y los coeficientes C_n se hayan definidos en (11.20).

12.– Se desea estudiar la variación a lo largo del tiempo de los desplazamientos en el plano vertical $v(x,t)$ de una viga uniforme biapoyada, de sección transversal constante y longitud L, que se encuentra sometida a una carga externa distribuida variable $W(x,t)$ (incluye también el peso propio). Si se asume que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones y que, por tanto, solamente se producen desplazamientos en el plano vertical, este problema se puede plantear en términos de la ecuación diferencial y las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b^2\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = W(x,t), \quad 0 < x < L,\ \ t > 0; \\
v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0; \\
v(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = g(x); \qquad 0 \le x \le L;
\end{gathered} \tag{1}$$

siendo $b^2 = \frac{gEI}{A\rho}$, donde g es aceleración de la gravedad, E el módulo de elasticidad, I el momento de inercia, A el área de la sección transversal y ρ el peso por unidad de volumen (se asume que todas estas magnitudes son constantes). Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas y corresponden respectivamente a los desplazamientos y a las velocidades iniciales de los puntos de la viga.

a) Demostrar, en primer lugar, que si las funciones $r(x)$ y $p(x)$ son funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y $q(x)$ es continua en (a,b), entonces el conjunto de las funciones no triviales

$y_i(x)$ con terceras derivadas continuas que verifican el siguiente problema de contorno, para distintos valores de los parámetros $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\left[r\,\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right] + (q + \lambda_i\,p)y_i = 0, \qquad x \in [a,b]; \\ a_1\,y_i\big|_{x=a} - \alpha_1\,(r\,y_i'')'\big|_{x=a} = 0, \qquad a_2\,y_i'\big|_{x=a} - \alpha_2\,(r\,y_i'')\big|_{x=a} = 0; \\ b_1\,y_i\big|_{x=b} - \beta_1\,(r\,y_i'')'\big|_{x=b} = 0, \qquad b_2\,y_i'\big|_{x=b} - \beta_2\,(r\,y_i'')\big|_{x=b} = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

forman un conjunto de funciones ortogonales con respecto a la función de peso $p(x)$ en el intervalo (a,b). (Los pares de coeficientes a_j y α_j, $j=1,2$, del problema (2) no pueden ser simultáneamente nulos —ni tampoco los pares de coeficientes b_j y β_j—).

b) De acuerdo con el enunciado del teorema anterior resolver el problema de contorno (1), es decir obtener los desplazamientos de una viga biapoyada si la carga externa es una función conocida $W(x,t)$.

Solución 12.a) Para demostrar que las soluciones del problema de contorno (2) son ortogonales con respecto a la función $p(x)$ en el intervalo (a,b), consideramos dos soluciones cualesquiera y_n, y_m asociadas a los valores propios λ_n y λ_m respectivamente. De este modo,

$$\left[ry_n''\right]'' + (q+\lambda_n p)y_n = 0 \tag{12a.1}$$

$$\left[ry_m''\right]'' + (q+\lambda_m p)y_m = 0 \tag{12a.2}$$

Si multiplicamos la ecuación (12a.1) por y_m y (12a.2) por y_n y restamos los resultados, obtenemos

$$\left[ry_n''\right]'' y_m - \left[ry_m''\right]'' y_n + (\lambda_n - \lambda_m)py_n y_m = 0 \tag{12a.3}$$

que se puede reescribir como

$$\left[(ry_n'')'y_m - (ry_m'')'y_n\right]' - (ry_n'')'y_m' + (ry_m'')'y_n' + (\lambda_n - \lambda_m)py_n y_m = 0 \tag{12a.4}$$

Si integramos (12a.4) en el dominio $[a,b]$, resulta

$$\left[(ry_n'')'y_m - (ry_m'')'y_n\right]_a^b - \int_a^b (ry_n'')'y_m' dx + \int_a^b (ry_m'')'y_n' dx = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b py_n y_m dx \tag{12a.5}$$

Apliquemos ahora un procedimiento similar sobre las condiciones de contorno que cumplen las soluciones y_n e y_m. Si consideramos en primer lugar las condiciones en el contorno $x=b$, tenemos:

$$b_1 y_n(b) - \beta_1 (ry_n'')'|_b = 0 \tag{12a.6}$$

$$b_1 y_m(b) - \beta_1 (ry_m'')'|_b = 0 \tag{12a.7}$$

Multiplicando la ecuación (12a.6) por $y_m(b)$ y (12a.7) por $y_n(b)$ y restando los resultados, obtenemos

$$(ry_n'')'|_b y_m(b) - (ry_m'')'|_b y_n(b) = 0 \tag{12a.8}$$

Para la otra condición en el extremo $x = b$ procedemos de un modo similar

$$b_2 y_n'(b) - \beta_2 (ry_n'')|_b = 0 \tag{12a.9}$$

$$b_2 y_m'(b) - \beta_2 (ry_m'')|_b = 0 \tag{12a.10}$$

Multiplicando la ecuación (12a.9) por $y_m'(b)$ y (12a.10) por $y_n'(b)$ y restando los resultados, se deduce que

$$(ry_n'')|_b y_m'(b) - (ry_m'')|_b y_n'(b) = 0 \tag{12a.11}$$

Realizando operaciones análogas sobre las condiciones de contorno en el extremo $x = a$, se concluye que

$$(ry_n'')'|_a y_m(a) - (ry_m'')'|_a y_n(a) = 0 \tag{12a.12}$$

$$(ry_n'')|_a y_m'(a) - (ry_m'')|_a y_n'(a) = 0 \tag{12a.13}$$

Por tanto, el término del contorno de (12a.5) es nulo en virtud de las relaciones (12a.8) y (12a.12). Consecuentemente, (12a.5) se reescribe como

$$\int_a^b (ry_m'')' y_n' dx - \int_a^b (ry_n'')' y_m' dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_n y_m dx \tag{12a.14}$$

Integrando por partes en los dos términos del primer miembro de (12a.14) se obtiene

$$\left[(ry_m'') y_n'\right]_a^b - \int_a^b r y_m'' y_n'' dx - \left[(ry_n'') y_m'\right]_a^b + \int_a^b r y_n'' y_m'' dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_n y_m dx \tag{12a.15}$$

Operando se obtiene,

$$\left[(ry_m'')|_b y_n'(b) - (ry_n'')|_b y_m'(b)\right] + \left[(ry_n'')|_a y_m'(a) - (ry_m'')|_a y_n'(a)\right] = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_n y_m dx \tag{12a.16}$$

que en virtud de las ecuaciones (12a.11) y (12a.13) es equivalente a

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_n y_m dx = 0 \tag{12a.17}$$

Si $\lambda_m \neq \lambda_n$ (espectro no degenerado), entonces y_n e y_m son ortogonales con respecto a p.

Solución 12.b) Para resolver el problema no homogéneo que se propone utilizaremos un desarrollo en serie de las funciones propias del problema homogéneo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t > 0 \\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{12b.1}
$$

Separando variables del modo $w(x,t) = \Phi(x)T(t)$ e introduciendo la constante λ se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\Phi^{IV} - \lambda\Phi = 0 \tag{12b.2}$$

$$T'' + \lambda b^2 T = 0 \tag{12b.3}$$

La constante λ debe ser positiva ya que es el único caso en el que la solución en el tiempo $T(t)$ es una función trigonométrica. Si $\lambda = 0$ la solución sería lineal y si $\lambda < 0$ la solución sería una combinación lineal de funciones exponenciales. En ambos casos, la solución al problema físico no tendría sentido. Esta argumentación se puede omitir comprobando que el problema de contorno

$$\Phi^{IV} - \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(L) = 0, \quad \Phi''(0) = \Phi''(L) = 0 \tag{12b.4}$$

no tiene valores propios ni funciones propias cuando $\lambda = 0$ o $\lambda < 0$. En consecuencia, basta con analizar el caso en que $\lambda > 0$. De este modo podemos decir que $\lambda = \mu^4$ y la solución de la ecuación diferencial vendrá dada por

$$\Phi(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} + C_3 \operatorname{sen}(\mu x) + C_4 \cos(\mu x) \tag{12b.5}$$

Para imponer las condiciones de contorno es necesario calcular $\Phi''(x)$ que viene dada por la expresión

$$\Phi''(x) = \mu^2 \left[C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} - C_3 \operatorname{sen}(\mu x) - C_4 \cos(\mu x)\right] \tag{12b.6}$$

Imponiendo las condiciones de contorno tenemos,

$$
\begin{aligned}
\Phi(0) = 0 &\Longrightarrow 0 = C_1 + C_2 + C_4 \\
\Phi''(0) = 0 &\Longrightarrow 0 = C_1 + C_2 - C_4 \\
\Phi(L) = 0 &\Longrightarrow 0 = C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L} + C_3 \operatorname{sen}(\mu L) + C_4 \cos(\mu L) \\
\Phi''(L) = 0 &\Longrightarrow 0 = C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L} - C_3 \operatorname{sen}(\mu L) - C_4 \cos(\mu L)
\end{aligned} \tag{12b.7}
$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ y $C_3 \operatorname{sen}(\mu L) = 0$. Por tanto,

$$\mu L = n\pi; \ n \in \mathbb{N} \tag{12b.8}$$

En consecuencia, los valores propios vienen dados por

$$\lambda_n = \frac{n^4\pi^4}{L^4}; \ n \in \mathbb{N} \tag{12b.9}$$

y las funciones propias son

$$\boxed{\Phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad n \in \mathbb{N}} \tag{12b.10}$$

Una vez obtenidas las funciones propias planteamos la siguiente solución para el problema no homogéneo

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\Phi_n(x)} \tag{12b.11}$$

Substituyendo la expresión (12b.11) en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(v_n''(t) + \lambda_n b^2 v_n\right) \Phi_n(x) = W(x,t) \tag{12b.12}$$

Si $W(x,t)$ se desarrolla en serie de Fourier, tenemos

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)\Phi_n(x) \Longrightarrow W_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L W(x,t)\Phi_n(x)dx}{\displaystyle\int_0^L \Phi_n^2(x)dx} = \frac{2}{L}\int_0^L W(x,t)\Phi_n(x)dx \tag{12b.13}$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(v_n'' + b^2\mu_n^4 v_n - W_n(t)\right) \Phi_n(x) = 0 \tag{12b.14}$$

de donde los coeficientes $v_n(t)$ se obtienen de la ecuación diferencial lineal

$$v_n'' + b^2\mu_n^4 v_n = W_n(t) \tag{12b.15}$$

La solución de (12b.15) se construye como la suma de solución del problema homogéneo y una solución particular del siguiente modo:

$$v_n(t) = v_n^H(t) + v_n^P(t) \tag{12b.16}$$

La solución general del problema homogéneo viene dada por

$$v_n^H(t) = A_1 \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) + A_2 \cos(b\mu_n^2 t) \tag{12b.17}$$

mientras que la solución particular se obtiene por variación de parámetros del modo habitual.

$$\begin{aligned}
v_n^P =& \widehat{v}_1 \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) + \widehat{v}_2 \cos(b\mu_n^2 t) \\
v_n'^P =& b\mu_n^2 \left(\widehat{v}_1 \cos(b\mu_n^2 t) - \widehat{v}_2 \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t)\right) + \underbrace{\widehat{v}_1' \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) + \widehat{v}_2' \cos(b\mu_n^2 t)}_{=0} \\
v_n''^P =& b^2\mu_n^4 \left(-\widehat{v}_1 \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) - \widehat{v}_2 \cos(b\mu_n^2 t)\right) + b\mu_n^2 (\widehat{v}_1' \cos(b\mu_n^2 t) - \widehat{v}_2' \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t))
\end{aligned} \tag{12b.18}$$

Substituyendo las expresiones anteriores en (12b.15), resulta

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_1' \cos(b\mu_n^2 t) - \widehat{v}_2' \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) &= \frac{1}{b\mu_n^2} W_n(t) \\
\widehat{v}_1' \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) + \widehat{v}_2' \cos(b\mu_n^2 t) &= 0
\end{aligned} \tag{12b.19}$$

de donde se obtienen, tras integración directa, los valores de $\widehat{v}_1$ y $\widehat{v}_2$:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_2 =& -\frac{1}{b\mu_n^2} \int W_n(t) \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) dt \\
\widehat{v}_1 =& \frac{1}{b\mu_n^2} \int W_n(t) \cos(b\mu_n^2 t) dt
\end{aligned} \tag{12b.20}$$

La solución general que da los coeficientes v_n es

$$\boxed{\begin{aligned}
v_n(t) = & \left[K_1 + \frac{1}{b\mu_n^2} \int_0^t W_n(s) \cos(b\mu_n^2 s) ds\right] \operatorname{sen}(b\mu_n^2 t) \\
+ & \left[K_2 - \frac{1}{b\mu_n^2} \int_0^t W_n(s) \operatorname{sen}(b\mu_n^2 s) ds\right] \cos(b\mu_n^2 t)
\end{aligned}} \tag{12b.21}$$

Las condiciones iniciales proporcionan 2 ecuaciones para obtener K_1 y K_2

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)\Phi_n(x) \Longrightarrow v_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\Phi_n(x) dx \tag{12b.22}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(0)\Phi_n(x) \Longrightarrow v_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\Phi_n(x) dx \tag{12b.23}$$

Por ello, teniendo en cuenta los valores de $v_n(0)$ y $v_n'(0)$ las constantes K_1 y K_2 son:

$$\boxed{\begin{aligned}
K_2 =& \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\Phi_n(x) dx \\
K_1 =& \frac{1}{b\mu_n^2} \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\Phi_n(x) dx
\end{aligned}} \tag{12b.24}$$

Por tanto, la solución del problema viene dada por la expresión (12b.11) donde las funciones propias son (12b.10) y las funciones $v_n(t)$ se obtienen de (12b.21). Los coeficientes K_1 y K_2 se encuentran definidos en (12b.24)