5.– Se desea estudiar la distribución estacionaria de temperaturas en el interior de una esfera homogénea de radio R, centrada en el origen de coordenadas, conocida la distribución de temperaturas en su superficie.

a) Plantear la ecuación diferencial en coordenadas esféricas que proporciona la temperatura $u(r,\theta,\phi)$, siendo r el radio $(0 \le r < R)$, θ la latitud $(0 \le \theta \le \pi)$ y ϕ la longitud ϕ $(0 \le \phi \le 2\pi)$, sabiendo que la distribución de temperaturas en la superficie de la esfera es una función conocida de θ, esto es, $u(R,\theta,\phi) = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \forall\phi$.

b) Demostrar que la separación de variables $\Psi(r)\,\Theta(\theta)$ proporciona las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\textbf{b.1)} \qquad \Theta'' + \text{cotan}(\theta)\,\Theta' + \lambda\Theta = 0$$

$$\textbf{b.2)} \qquad r^2\Psi'' + 2r\Psi' - \lambda\Psi = 0$$

c) Efectuando el cambio de variable $\xi = \cos\theta$ y denominando $G(\xi) = \Theta(\text{arccos}\xi)$, demostrar que la ecuación **b.1)** puede transformarse en la ecuación de Legendre:

$$[(1-\xi^2)G'(\xi)]' + \lambda G(\xi) = 0.$$

Esta ecuación diferencial tiene soluciones no triviales en el intervalo $[-1,1]$ para los valores propios $\lambda_n = n(n+1)$, siendo $n = 0,1,2,\ldots$ Las funciones propias correspondientes a cada valor λ_n son los "Polinomios de Legendre" de grado n: $P_n(\xi)$, que pueden generarse mediante la expresión recurrente:

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi); \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.$$

d) Resolver la ecuación diferencial **b.2)**, teniendo en cuenta que $\lambda_n = n(n+1)$, y plantear la solución como una serie de polinomios de Legendre.

e) Los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal de funciones que, entre otras propiedades, verifican la relación:

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} P_n^2(\xi)d\xi = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} P_{n-1}^2(\xi)d\xi.$$

Haciendo uso de esta expresión, obtener la solución final $u(r,\theta,\phi)$ en términos de los polinomios de Legendre y de la función $f(\theta)$.

Solución 5.a) Sea $u(r,\theta,\phi)$ la temperatura en un punto del interior de la esfera definido por sus correspondientes coordenadas esféricas. La ecuación diferencial que gobierna el problema propuesto es $\Delta u = 0$ y la condición de contorno $u(R,\theta,\phi) = f(\theta)\ \forall\phi$. Por tanto, el problema de la distribución de temperaturas en estado estacionario en una esfera se puede plantear como el siguiente problema interior de Dirichlet

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \\ u(R,\theta,\phi) = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \end{array}} \qquad (5a.1)$$

Dado que la condición de contorno sólo depende de la coordenada esférica θ, el problema puede resolverse en el plano (r,θ) para valores $0 < r < R$ y $0 \le \theta \le \pi$ y la distribución de temperaturas que se obtenga será válida para cualquier valor de ϕ. Por tanto, podemos garantizar que

$$u(r,\theta,\phi) = v(r,\theta)\ \forall\phi \in [0,2\pi] \tag{5a.2}$$

donde $v(r,\theta)$ es la solución del siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{cotan}(\theta)}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0;\ 0 < r < R;\ 0 \le \theta \le \pi \\ &v(R,\theta) = f(\theta);\ 0 \le \theta \le 2\pi\end{aligned} \tag{5a.3}$$

Solución 5.b) La separación de variables $v(r,\theta) = \Psi(r)\Theta(\theta)$ conduce a

$$\Psi''\Theta + \frac{2}{r}\Psi'\Theta + \frac{1}{r^2}\Psi\Theta'' + \frac{\operatorname{cotan}(\theta)}{r^2}\Psi\Theta' = 0 \tag{5b.1}$$

que, introduciendo la constante λ, se puede separar del siguiente modo:

$$\Theta'' + \operatorname{cotan}(\theta)\Theta' + \lambda\Theta = 0 \tag{5b.2}$$

$$r\Psi'' + 2r\Psi' - \lambda\Psi = 0 \tag{5b.3}$$

Solución 5.c) Si introducimos el cambio de variable $\xi = \cos(\theta)$ las derivadas de la función Θ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\Theta' &= \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{d\Theta}{d\xi}(-\operatorname{sen}(\theta)) \\ \Theta'' &= \frac{d}{d\theta}\left(-\operatorname{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\cos(\theta)\frac{d\Theta}{d\xi} + \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\end{aligned} \tag{5c.1}$$

y la ecuación $\Theta'' + \operatorname{cotan}(\theta)\Theta' + \lambda\Theta = 0$ se escribe como

$$\operatorname{sen}^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{d\xi} + \lambda\Theta = 0 \tag{5c.2}$$

donde Θ es una función de ξ en la forma $\Theta(\arccos(\xi))$ siendo $\xi = \cos(\theta)$, por lo que

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta(\arccos(\xi))}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta(\arccos(\xi))}{d\xi} + \lambda\Theta(\arccos(\xi)) = 0 \tag{5c.3}$$

Denominando $G(\xi) = \Theta(\arccos(\xi))$ tendremos:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2G}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dG}{d\xi} + \lambda G = 0 \tag{5c.4}$$

que corresponde al siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dG}{d\xi}\right) + \lambda G = 0;\ -1 \le \xi \le 1 \tag{5c.5}$$

La ecuación (5c.5) constituye un problema de Sturm-Liouville singular, ya que la función $(1-\xi^2)$ se anula en los extremos del dominio. Se puede demostrar la ortogonalidad de las funciones propias para valores propios

$$\boxed{\lambda_n = n(n+1);\ n = 0, 1, \ldots} \tag{5c.6}$$

Dichas funciones son los Polinomios de Legendre $P_n(\xi)$. Los polinomios de Legendre se pueden generar mediante la siguiente fórmula recurrente: dados $P_0(\xi) = 1$ y $P_1(\xi) = \xi$

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi);\ n \geq 2 \tag{5c.7}$$

Solución 5.d) La ecuación diferencial $r^2\Psi'' + 2r\Psi' - n(n+1)\Psi = 0;\ n = 0, 1, \ldots$ se conoce como ecuación de Euler-Cauchy y su solución viene dada por la combinación lineal de soluciones del tipo $\Psi(r) = r^q$. Introduciendo la expresión anterior en la ecuación de Euler-Cauchy se obtienen dos valores posibles para q: $q_1 = n$ y $q_2 = -(n+1)$. Por tanto, la solución general viene dada por

$$\Psi(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \tag{5d.1}$$

En $r = 0$ la EDP es singular. La condición de singularidad que exige que $u(r, \theta, \phi)$ esté acotada cuando $r \to 0$, se traduce en que $v(r, \theta)$ y $\Psi(r)$ deben estar acotadas cuando $r \to 0$. Para que esta condición de singularidad se satisfaga es necesario que $B = 0$.

Por otra parte, dado que para cada valor de n tendremos un valor propio λ_n y una función propia $P_n(\xi)$, las soluciones de la ecuación de Euler-Cauchy también están asociadas a cada valor de n, esto es $\Psi_n(r) = A_n r^n$. La solución en serie de Polinomios de Legendre es

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos(\theta)) \tag{5d.2}$$

Solución 5.e) Las constantes A_n se pueden determinar imponiendo la condición de contorno $v(R, \theta) = f(\theta)$, esto es,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos(\theta)) \tag{5e.1}$$

Dado que $\xi = \cos(\theta)$ y que los Polinomios de Legendre son ortogonales respecto a 1, se obtiene:

$$A_n = \frac{1}{R^n} \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(\arccos(\xi)) P_n(\xi) d\xi}{\displaystyle\int_{-1}^{+1} P_n^2(\xi) d\xi} \tag{5e.2}$$

Utilizando la expresión recurrente (5c.7) se comprueba que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(\xi) d\xi = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2(\xi) d\xi = \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^{+1} P_{n-2}^2(\xi) d\xi = \ldots$$

$$\dots = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{+1} P_0^2(\xi)d\xi = \frac{2}{2n+1} \tag{5e.3}$$

La solución final es

$$\boxed{u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos(\theta))\ \forall\phi \in [0,2\pi]} \tag{5e.4}$$

siendo P_n los polinomios de Legendre y

$$\boxed{A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_{-1}^{+1} f(\arccos(\xi))P_n(\xi)d\xi} \tag{5e.5}$$

6.– Obtener las vibraciones longitudinales de una barra cuyos extremos están fijos elásticamente con idénticos coeficientes de rigidez en ambas sujeciones. Las condiciones iniciales vienen dadas por dos funciones conocidas f y g. Esto es, resolver el problema

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + hu(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \\
u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq L.
\end{gathered}$$

Solución 6. La EDP y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas por lo que se pueden separar variables directamente, esto es: $u(x,t) = \Phi(x)T(t)$. De este modo, tras introducir la constante λ, resulta:

$$T'' - \lambda\alpha^2 T = 0 \tag{6.1}$$

$$\Phi'' - \lambda\Phi = 0 \tag{6.2}$$

Además, las condiciones de contorno separadas son

$$\Phi'(0) - h\Phi(0) = 0 \tag{6.3}$$

$$\Phi'(L) + h\Phi(L) = 0 \tag{6.4}$$

Por tanto, el problema de contorno a resolver es

$$\Phi'' - \lambda\Phi = 0, \quad \Phi'(0) - h\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(L) + h\Phi(L) = 0 \tag{6.5}$$

Los casos correspondientes a $\lambda \geq 0$ no proporcionan autovalores ni autofunciones. Si $\lambda < 0$ podemos escribir $\lambda = -\mu^2$ y la solución de la EDO es

$$\Phi(x) = A\,\mathrm{sen}(\mu x) + B\cos(\mu x) \tag{6.6}$$

Para que se verifiquen las condiciones de contorno debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \mu A - hB &= 0 \\ \mu A\cos(\mu L) - \mu B\,\mathrm{sen}(\mu L) + hA\,\mathrm{sen}(\mu L) + Bh\cos(\mu L) &= 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

De las ecuaciones (6.7) se obtiene la ecuación que permite determinar los valores propios, esto es,

$$h\cos(\mu L) - \mu\,\mathrm{sen}(\mu L) + \frac{h^2}{\mu}\mathrm{sen}(\mu L) + h\cos(\mu L) = 0 \tag{6.8}$$

En consecuencia, el espectro de valores propios $\lambda_i = -\mu_i^2$ se obtiene de las infinitas raíces de la ecuación

$$\boxed{\mathrm{cotan}(\mu_i L) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_i}{h} - \frac{h}{\mu_i}\right); \;\; i \in \mathbb{N}} \tag{6.9}$$

que es equivalente a (6.8). Las funciones propias son

$$\Phi_i(x) = A\,\mathrm{sen}(\mu_i x) + B\cos(\mu_i x) \tag{6.10}$$

Debido a la primera de las expresiones de (6.7) se debe cumplir $\mu A - hB = 0$, por lo que las funciones propias también se pueden escribir como

$$\Phi_i(x) = A\left[\mathrm{sen}(\mu_i x) + \frac{\mu_i}{h}\cos(\mu_i x)\right] = A\,\mathrm{sen}(\mu_i x + \varphi_i) \tag{6.11}$$

siendo

$$\boxed{\varphi_i = \arctan(\mu_i/h).} \tag{6.12}$$

Las funciones propias obtenidas son ortogonales con respecto a 1 en $(0, L)$ y por integración directa, se obtiene:

$$\int_0^L \Phi_i^2(x)dx = \int_0^L \mathrm{sen}^2(\mu_i x + \varphi_i)dx = \frac{(\mu_i^2 + h^2)L + 2h}{2(\mu_i^2 + h^2)}; \forall i = 1, 2, \ldots \tag{6.13}$$

Una vez obtenidos los valores propios $\lambda_i = -\mu_i^2$, ya se puede resolver la EDO en el tiempo $T'' - \lambda\alpha^2 T = 0$ cuya solución general es

$$T_i(t) = C_i\,\mathrm{sen}(\mu_i \alpha t) + D_i\cos(\mu_i \alpha t) \tag{6.14}$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_i \operatorname{sen}(\mu_i \alpha t) + D_i \cos(\mu_i \alpha t)\right) \operatorname{sen}(\mu_i x + \varphi_i)} \tag{6.15}$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos las ecuaciones que tienen que verificar los coeficientes C_i y D_i

$$u(x,0) = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_i \operatorname{sen}(\mu_i x + \varphi_i) \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \Longleftrightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \alpha C_i \operatorname{sen}(\mu_i x + \varphi_i) \tag{6.17}$$

Utilizando la ortogonalidad de las funciones propias se obtiene,

$$\boxed{C_i = \frac{1}{\alpha \mu_i} \frac{2(\mu_i^2 + h^2)}{(\mu_i^2 + h^2)L + 2h} \int_0^L g(z) \operatorname{sen}(\mu_i z + \varphi_i) dz} \tag{6.18}$$

$$\boxed{D_i = \frac{2(\mu_i^2 + h^2)}{(\mu_i^2 + h^2)L + 2h} \int_0^L f(z) \operatorname{sen}(\mu_i z + \varphi_i) dz} \tag{6.19}$$

7.– Se desea estudiar la variación a lo largo del tiempo de la posición en el eje vertical u de una membrana circular de radio a que se encuentra apoyada en un marco rígido horizontal en todo instante de tiempo. La fricción a la que está sometida la membrana durante su movimiento vibratorio puede considerarse proporcional según una constante positiva a la velocidad vertical de la membrana en cada punto.

En estas condiciones, y si las condiciones iniciales únicamente dependen de la coordenada radial, el problema planteado tiene simetría angular por lo que, si se asume que el movimiento tiene lugar en pequeñas deformaciones y que, por tanto, solamente se producen desplazamientos en el plano vertical y si no se considera el peso de la membrana, se puede escribir en términos de la ecuación diferencial y las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - h \frac{\partial u}{\partial t}, \quad r < a, \ \ t > 0;$$

$$u(a,t) = 0; \quad t \geq 0; \quad u(r,0) = f(r), \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g(r); \qquad r \leq a;$$

siendo r la coordenada radial, t el tiempo y c la velocidad característica de propagación de una onda en la membrana.

Obtener los desplazamientos de la membrana $u(r,t)$, si $h < 4c/a$.

(Nota: Las primeras raíces positivas de $J_0(x)$ son: 2.40482556043592, 5.52007810562151, 8.65372791287264, 11.79153443900112, 14.93091770846310,...)

Solución 7. La ecuación diferencial en derivadas parciales es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(r,t) = \Phi(r)T(t) \tag{7.1}$$

resultando

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{T''}{T} + h\frac{T'}{T}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r}\frac{\Phi'}{\Phi} \tag{7.2}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ, resultan las ecuaciones

$$r\Phi'' + \Phi' - \lambda r\Phi = 0 \tag{7.3.a}$$

$$T'' + hT' - \lambda c^2 T = 0 \tag{7.3.b}$$

Asimismo se puede separar la condición de contorno en $r = a$ dada por $u(a,t) = 0$ en la forma $\Phi(a) = 0$.

Por otra parte, se hace necesario introducir una condición de singularidad por cuanto la ecuación en derivadas parciales es singular en $r = 0$; así, si se establece que los desplazamientos de la membrana están acotados en todos los puntos, y en particular en $r = 0$, ello implica que para cualquier función $T(t)$ acotada, los desplazamientos están acotados siempre que $\Phi(0)$ también esté acotada.

En consecuencia, las funciones propias se obtendrán de estudiar las soluciones no triviales del problema de contorno

$$r\Phi'' + \Phi' - \lambda r\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(a) = 0 \tag{7.4}$$

- Para valores propios negativos ($\lambda = -\mu^2$), el problema de contorno es

  $$r\Phi'' + \Phi' + \mu^2 r\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(a) = 0 \tag{7.5}$$

  es decir un problema de Sturm-Liouville singular cuyas funciones propias (si existen) constituirán un conjunto ortogonal en el dominio $(0,a)$ respecto a la función de ponderación $p(r) = r$.
  La ecuación en derivadas parciales dada en (7.5) se puede expresar como una ecuación diferencial de Bessel si se realiza el cambio de variable $z = \mu r$, obteniéndose

  $$z\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{d\Phi}{dz} + z\Phi = 0 \tag{7.6}$$

  que como se observa se trata de una Ecuación Diferencial de Bessel de orden 0 en la variable z. Su solución general es la combinación lineal

  $$\Phi(z) = A\,J_0(z) + B\,Y_0(z) \tag{7.7}$$

  siendo $J_0(z)$ e $Y_0(z)$ las funciones de Bessel de primera clase y de segunda clase de orden 0 respectivamente. Deshaciendo el cambio de variable, se obtiene la solución general de la ecuación (7.5):

  $$\Phi(r) = A\,J_0(\mu r) + B\,Y_0(\mu r) \tag{7.8}$$

La condición de singularidad "$\Phi(0)$ acotada" se satisface si y solo si en la solución no interviene la función de segunda clase Y_0 dado que $\lim_{r\to 0} Y_0(\mu r) \to -\infty$, por lo que $B = 0$.
Por otra parte, la condición de contorno $\Phi(a) = 0$ implica

$$\Phi(a) = 0 \to A\, J_0(\mu a) = 0 \tag{7.9}$$

Así, si se denominan $\{\nu_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, al conjunto infinito de las raíces de la función de Bessel de primera clase de orden 0, es decir,

$$\boxed{J_0(\nu_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{7.10}$$

entonces los valores de μ_n valen

$$\boxed{\mu_n = \frac{\nu_n}{a}, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{7.11}$$

En resumen los valores propios son $\lambda = -\mu_n^2 = -\dfrac{\nu_n^2}{a^2}$ y las funciones propias asociadas a dichos autovalores $\Phi_n(r) = J_0(\mu_n r)$.

- Para valores propios nulos ($\lambda = 0$), el problema de contorno es

$$r\Phi'' + \Phi' = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(a) = 0 \tag{7.12}$$

que no tiene funciones propias asociadas, al no existir ninguna solución no trivial de la forma general $\Phi(r) = A\ln(r) + B$ que satisfaga la condición de singularidad y la condición de contorno.

- Para valores propios positivos ($\lambda = +\mu^2$), se obtiene el problema de Sturm-Liouville singular

$$r\Phi'' + \Phi' - \mu^2 r\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(a) = 0 \tag{7.13}$$

que al igual que en el caso de la ecuación en derivadas parciales dada en (7.5) se puede expresar como una ecuación diferencial de Bessel mediante un cambio de variable de la forma $z = \mu r$, obteniéndose

$$z\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{d\Phi}{dz} - z\Phi = 0 \tag{7.14}$$

que efectivamente es una ecuación diferencial de Bessel *modificada* de orden 0 en la variable z, y cuya solución general es la combinación lineal

$$\Phi(z) = A\, I_0(z) + B\, K_0(z) \tag{7.15}$$

siendo $I_0(z)$ y $K_0(z)$ las funciones de Bessel modificadas de primera clase y de segunda clase de orden 0 respectivamente. Seguidamente, al deshacer el cambio $z = \mu r$, se obtiene la solución general de la ecuación (7.13):

$$\Phi(r) = A\, I_0(\mu r) + B\, K_0(\mu r) \tag{7.16}$$

La condición de singularidad "$\Phi(0)$ acotada" se satisface si y solo si en la solución no interviene la función de segunda clase modificada K_0 dado que $\lim_{r\to 0} K_0(\mu r) \to +\infty$, por lo que de nuevo

$B = 0$.

Por otra parte, la condición de contorno $\Phi(a) = 0$ implica que debe satisfacerse la igualdad

$$\Phi(a) = 0 \rightarrow A\, I_0(\mu a) = 0 \tag{7.17}$$

Sin embargo, dado que la función I_0 no tiene raíces en la recta real, no es posible obtener los valores de μ, y (7.17) solo se satisface si $A = 0$, esto es con la solución trivial. En consecuencia, no existen funciones propias asociadas a autovalores positivos.

La resolución de la ecuación diferencial (7.3.b), para los distintos valores propios $\lambda = -\mu_n^2$ donde μ_n vienen dados por (7.11) conduce a

$$T'' + hT' + \left(\frac{\nu_n c}{a}\right)^2 T = 0. \tag{7.18}$$

En el enunciado se establece que los valores del coeficiente de fricción h son tales que $h < 4c/a$. Si además se tiene en cuenta que todas las raíces positivas de la función de Bessel J_0 son mayores que 2 (la menor vale 2.40482556043592), entonces se cumple que $h^2 < 4(\nu_n c/a)^2$ por lo que la solución de la ecuación diferencial ordinaria (7.18) corresponde únicamente a casos subamortiguados, esto es

$$T_n(t) = e^{-ht/2} \left(C_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)\right) \tag{7.19}$$

siendo ω_n las frecuencias naturales de vibración de la membrana:

$$\boxed{\omega_n = \frac{\sqrt{4(\nu_n c/a)^2 - h^2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{7.20}$$

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (7.1) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie generalizada de Fourier en términos de funciones de Bessel de primera clase de orden 0:

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht/2} \left(C_n \operatorname{sen}(\omega_n\, t) + D_n \cos(\omega_n\, t)\right) J_0(\mu_n r)} \tag{7.21}$$

Finalmente los coeficientes C_n y D_n se pueden obtener sin más que imponer que (7.21) verifique las condiciones iniciales del problema. La condición inicial homogénea $u(r,0) = f(r)$ conduce a la identidad

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, J_0(\mu_n\, r) \tag{7.22}$$

es decir,

$$\boxed{D_n = \frac{\displaystyle\int_0^a s\, f(s)\, J_0(\mu_n\, s)\, ds}{\displaystyle\int_0^a s\, J_0^2(\mu_n\, s)\, ds}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{7.23}$$

Por otra parte la imposición de la condición inicial en velocidades $\dfrac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g(r)$, implica que debe verificarse la igualdad

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-h}{2} D_n + \omega_n C_n \right) J_0(\mu_n r) \tag{7.24}$$

de la que se obtienen los coeficientes C_n:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{h}{2} D_n + \frac{\displaystyle\int_0^a s\, g(s)\, J_0(\mu_n s)\, ds}{\displaystyle\int_0^a s\, J_0^2(\mu_n s)\, ds} \right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{7.25}$$

En consecuencia, los desplazamientos horizontales de la membrana $u(r,t)$ vienen dados por la función (7.21) con los coeficientes (7.23) y (7.25), donde μ_n se obtiene según (7.10) y (7.11), y ω_n viene dado por (7.20).

8.– Un fluido incompresible se encuentra inicialmente en reposo en el interior de una tubería circular de radio R y longitud L. En un determinado instante se aplica un gradiente de presión Δp. En condiciones de flujo laminar, la velocidad $v(r,t)$ en cualquier posición radial r e instante t satisface la ecuación diferencial

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p}{L}, \qquad 0 < r < R, \quad t > 0,$$

siendo ρ la densidad y μ la viscosidad del fluido.

Teniendo en cuenta que la velocidad v es finita en el centro del tubo ($r = 0$) en cualquier instante de tiempo, y que en el contorno ($r = R$) la velocidad v debe ser nula para que no se produzca deslizamiento de la lámina de fluido en contacto con la pared, se pide obtener la expresión de la velocidad $v(r,t)$ para cualquier posición radial r e instante de tiempo t.

Solución 8. El problema de contorno y valores iniciales cuya resolución se propone es

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{\Delta p}{L}, \qquad 0 < r < R, \quad t > 0 \\ \quad v(0,t) \ \text{finita}; \qquad v(R,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \qquad v(r,0) = 0, \quad 0 < r < R \end{array}} \tag{8.1}$$

Obsérvese que se trata de un problema no homogéneo debido a la presencia del término $\dfrac{\Delta p}{L}$ en el segundo miembro de la ecuación diferencial. Consecuentemente, se puede plantear hallar la solución $v(r,t)$ como la suma de una solución de equilibrio $v_E(r)$ (caso de que exista) y una función $u(r,t)$ correspondiente a los estados transitorios, de modo que