CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 5

Separación de Variables
Desarrollos en Funciones Propias (Curso 2024–2025)

1.– Resolver los siguientes problemas de valores iniciales y contorno:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(x,0) = x^2(1-x); \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0; \quad t \ge 0. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\,\mathrm{sen}^2(x); \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0; \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Solución 1.a) La ecuación diferencial es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1a.1}$$

resultando

$$\frac{1}{4}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \tag{1a.2}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ, resultan las ecuaciones

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{1a.3.a}$$

$$T' - 4\lambda T = 0 \tag{1a.3.b}$$

Asimismo y dado que las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = 1$ son también lineales y homogéneas pueden separarse en la forma $X(0) = 0$, $X(1) = 0$. En consecuencia, debemos estudiar el problema de contorno

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(1) = 0 \tag{1a.4}$$

Este problema no tiene funciones propias para valores propios positivos ($\lambda = \mu^2$) dado que no existen funciones de la forma $X = Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}$ que satisfagan $X(0) = 0$, $X(1) = 0$ excepto la solución trivial $X(x) = 0$, ni tampoco funciones propias asociadas a valores propios nulos, en el que la solución general es una recta ($X = C + Dx$).

Para valores propios negativos ($\lambda = -\mu^2$) en los cuales la solución general es de la forma $X(x) = C\,\mathrm{sen}(\mu x) + D\cos(\mu x)$, la imposición de las condiciones de contorno conduce a que existen infinitos valores propios, dados por $\lambda_n = -\mu_n^2$, siendo

$$\mu_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1a.5}$$

cuyas funciones propias asociadas son $X_n(x) = \mathrm{sen}(\mu_n x)$, $n \in \mathbb{N}$.

La resolución de la ecuación diferencial (1a.3.b), para los distintos valores propios conduce a

$$T' + 4\mu_n^2 T = 0 \quad \longrightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{-4\mu_n^2 t} \tag{1a.6}$$

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (1a.1) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n \tag{1a.7}$$

esto es:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-4n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)} \tag{1a.8}$$

Finalmente la imposición de la condición inicial $u(x,0) = x^2(1-x)$ conduce a la identidad

$$x^2(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) \tag{1a.9}$$

de la que se obtiene el coeficiente:

$$A_n = 2\int_0^1 s^2(1-s)\operatorname{sen}(n\pi s)ds \tag{1a.10}$$

que integrado resulta

$$\boxed{A_n = \frac{4(-1)^{n+1} - 2}{n^3\pi^3}} \tag{1a.11}$$

Solución 1.b) La ecuación diferencial es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1b.1}$$

resultando

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} \tag{1b.2}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ, resultan las ecuaciones

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{1b.3.a}$$

$$T'' - \lambda\alpha^2 T = 0 \tag{1b.3.b}$$

Asimismo y dado que las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = \pi$ son también lineales y homogéneas pueden separarse en la forma $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$. En consecuencia, debemos estudiar el problema de contorno

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0 \tag{1b.4}$$

Este problema únicamente tiene funciones propias no triviales asociadas a valores propios negativos ($\lambda = -\mu^2$), y que vienen dados por $\lambda_n = -n^2$ y $X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

La resolución de la ecuación diferencial (1b.3.b), para los distintos valores propios conduce a

$$T'' + n^2\alpha^2 T = 0 \quad \longrightarrow \quad T_n(t) = A_n \operatorname{sen}(n\alpha t) + B_n \cos(n\alpha t) \tag{1b.5}$$

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (1b.1) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie de Fourier

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}(n\alpha t) + B_n \cos(n\alpha t)) \operatorname{sen}(nx)} \tag{1b.6}$$

Finalmente la imposición de la condición inicial homogénea $u(x,0) = 0$ conduce a que el coeficiente B_n debe ser nulo ($B_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), y de la imposición de la condición inicial en la derivada temporal $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\operatorname{sen}^2(x)$ resulta la identidad

$$8\operatorname{sen}^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n\alpha \operatorname{sen}(nx) \tag{1b.7}$$

de la que se obtiene el coeficiente:

$$A_n = \frac{16}{n\alpha\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(s) \operatorname{sen}(ns) ds \tag{1b.8}$$

que integrado resulta

$$\boxed{A_n = \frac{32((-1)^n - 1)}{n^2\pi\alpha(n^2 - 4)}} \tag{1b.9}$$

2.– Se desea obtener la distribución de temperaturas $u(x,y)$ en estado estacionario de una placa metálica cuadrada de 1 m^2. Las condiciones de contorno en los cuatro lados de la placa son las siguientes: el contorno $(0,y)$ está aislado, la temperatura del contorno $(1,y)$ es igual a un valor de referencia (que puede tomarse igual a 0), el flujo de calor en el contorno $(x,0)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura en cada punto y la anterior temperatura de referencia (considérese que los valores de las constantes físicas son la unidad, y que por tanto esta condición de contorno es de la forma $u_y(x,0) - u(x,0) = 0$) y la temperatura del contorno $(x,1)$ es conocida (e igual a T_0).

Si no existen fuentes de calor en la placa, el único mecanismo de transferencia de calor es debido a la difusión y la placa puede considerarse isótropa y homogénea, plantear el problema de contorno y obtener la distribución de temperaturas $u(x,y)$.

Solución 2. Se propone resolver el problema de contorno

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0, \;\; u(1,y) = 0, \;\; \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} - u(x,0) = 0, \;\; u(x,1) = T_0 \end{array}} \tag{2.1}$$

La ecuación diferencial es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{2.2}$$

resultando

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \tag{2.3}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ, resultan las ecuaciones

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{2.4.a}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \tag{2.4.b}$$

Asimismo y dado que las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = 1$ son también lineales y homogéneas pueden separarse en la forma $X'(0) = 0$, $X(1) = 0$. En consecuencia, debemos estudiar el problema de contorno

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X(1) = 0 \tag{2.5}$$

Este problema no tiene funciones propias para valores propios positivos ($\lambda = \mu^2$) dado que no existen funciones de la forma $X = C_1 e^{\mu x} + D_1 e^{-\mu x}$ que satisfagan $X'(0) = 0$, $X(1) = 0$ excepto la solución trivial $X(x) = 0$.

En el caso del valor propio nulo ($\lambda = 0$) en el que la solución general es una recta ($X = C_0 + D_0 x$), la única función que verifica las condiciones $X'(0) = 0$, $X(1) = 0$ es la solución trivial. En consecuencia, para el valor propio nulo no existe tampoco ninguna función propia.

Para valores propios negativos ($\lambda = -\mu^2$) en los cuales la solución general es de la forma $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\mu x) + D_1 \cos(\mu x)$, la imposición de las condiciones de contorno conduce a

$$X'(0) = 0 \;\; \rightarrow \;\; C_1 = 0; \qquad X(1) = 0 \;\; \rightarrow \;\; D_1 \cos(\mu) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \mu = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \; n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

Por lo tanto, en el caso $\lambda < 0$ existen infinitos valores propios, dados por $\lambda_n = -\mu_n^2$, siendo

$$\boxed{\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{2.7}$$

cuyas funciones propias asociadas son $X_n(x) = \cos(\mu_n x)$, $n \in \mathbb{N}$.

La resolución de la ecuación diferencial (2.4.b), para los distintos valores propios conduce a

$$Y'' - \mu_n^2 Y = 0 \;\; \longrightarrow \;\; Y_n(y) = A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y} \tag{2.8}$$

La condición de contorno mixta $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} - u(x,0) = 0$ es lineal y homogénea por lo que es separable: $Y'(0) - Y(0) = 0$. Aplicando esta condición a la función (2.8) se obtiene la relación entre los coeficientes

$$(\mu_n A_n - \mu_n B_n) - (A_n + B_n) = 0 \quad \longrightarrow \quad B_n = \frac{\mu_n - 1}{\mu_n + 1} A_n \tag{2.9}$$

Si ahora se sustituye B_n en (2.8) resulta

$$Y_n(y) = A_n \left(e^{\mu_n y} + \frac{\mu_n - 1}{\mu_n + 1} e^{-\mu_n y} \right) \tag{2.10}$$

y que también se puede reescribir como

$$Y_n(y) = \frac{2A_n}{\mu_n + 1} \left(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n y) + \operatorname{Sh}(\mu_n y) \right) = \widetilde{A}_n \left(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n y) + \operatorname{Sh}(\mu_n y) \right) \tag{2.11}$$

donde $\widetilde{A}_n$ ha sido redefinida al expresar la función $Y_n(y)$ en términos del seno y coseno hiperbólicos.

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (2.2) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie de Fourier

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n \tag{2.12}$$

esto es:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \left(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n y) + \operatorname{Sh}(\mu_n y) \right) \cos(\mu_n x)} \tag{2.13}$$

Finalmente la imposición de la condición de contorno no homogénea $u(x,1) = T_0$ conduce a la identidad

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \left(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n) + \operatorname{Sh}(\mu_n) \right) \cos(\mu_n x) \tag{2.14}$$

de la que se obtiene el coeficiente:

$$\widetilde{A}_n = \frac{T_0}{\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n) + \operatorname{Sh}(\mu_n)} \frac{\displaystyle\int_0^1 \cos(\mu_n s) ds}{\displaystyle\int_0^1 \cos^2(\mu_n s) ds} = \frac{2T_0 \operatorname{sen}(\mu_n)}{\mu_n(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n) + \operatorname{Sh}(\mu_n))} \tag{2.15}$$

Finalmente, dado que $\mu_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}(\mu_n) = (-1)^{n+1}$ por lo que el coeficiente $\widetilde{A}_n$ vale

$$\boxed{\widetilde{A}_n = \frac{2(-1)^{n+1} T_0}{\mu_n(\mu_n \operatorname{Ch}(\mu_n) + \operatorname{Sh}(\mu_n))}} \tag{2.16}$$

3.– Un cable uniforme, flexible, de longitud L y densidad lineal constante λ se cuelga verticalmente por uno de sus extremos. Inicialmente, y estando el cable en reposo, se aplica al segmento de cable comprendido entre $x = 0$ (el extremo libre) y $x = \beta L$ ($\beta < 1$) una velocidad horizontal constante v.

a) Asumiendo que las vibraciones que se originan son pequeñas, plantear el problema de contorno que gobierna el movimiento ondulatorio que se produce.

b) Hallar la expresión que proporciona el desplazamiento horizontal de cualquier punto x del cable en un instante t.

Solución 3.a) Sea $u(x,t)$ el desplazamiento horizontal de un punto x del cable en un instante de tiempo t. Analizaremos un segmento de cable de longitud Δx durante el movimiento en un instante t: así, sean $T(x,t)$ la tensión del cable en el punto x y $T(x+\Delta x,t)$ la tensión del cable en el punto $x+\Delta x$, y sean $\theta(x,t)$ el ángulo que forma con la vertical la recta tangente a la curva que describe el cable en el punto x y $\theta(x+\Delta x,t)$ el ángulo que forma con la vertical la recta tangente a la curva en el punto $x+\Delta x$. El planteamiento del balance de fuerzas que actúan conduce a:

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x,t)\,\mathrm{sen}\,\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\,\mathrm{sen}\,\theta(x,t) \tag{3a.1}$$

siendo λ kg/m la densidad lineal del cable (asumida constante). Dividiendo esta expresión entre Δx y evaluando en el límite cuando $\Delta x \to 0$ se obtiene

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\,\mathrm{sen}\,\theta(x,t)\right), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{3a.2}$$

Sin embargo, la tensión $T(x,t)$ en cada punto del cable viene dada por el peso de cable que soporta, esto es $T(x,t) = \lambda\, g\, x$ donde g es la aceleración de la gravedad. Por otra parte, dado que se asume que el movimiento tiene lugar en pequeñas vibraciones entonces es válida la aproximación

$$\mathrm{sen}\,\theta(x,t) \approx \tan\theta(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{3a.3}$$

por lo que resulta la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(gx\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{3a.4}$$

En resumen el problema de valores iniciales y de contorno es

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(gx\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) \;\text{ acotado}, \;\; t \geq 0; \quad u(L,t) = 0, \;\; t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq L; \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} v \; ; \; 0 \leq x \leq \beta L \\ 0 \; ; \; \beta L < x \leq L \end{cases} \end{array}} \tag{3a.5}$$

Solución 3.b) La ecuación diferencial en derivadas parciales es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(x,t) = \Phi(x)T(t) \tag{3b.1}$$

resultando

$$\frac{1}{g}\frac{T''}{T} = \frac{1}{\Phi}\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} \tag{3b.2}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación $\widetilde{\lambda}$, resultan las ecuaciones

$$\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} - \widetilde{\lambda}\Phi = 0 \tag{3b.3.a}$$

$$T'' - \widetilde{\lambda}gT = 0 \tag{3b.3.b}$$

Asimismo se puede separar la condición de contorno en $x = L$ dada por $u(L,t) = 0$ en la forma $\Phi(L) = 0$. La condición de singularidad en $x = 0$ que establece que los desplazamientos horizontales del cable en el extremo libre están acotados se puede también expresar de forma separada ya que esta condición se verifica para cualquier función $T(t)$ acotada siempre que $\Phi(0)$ también esté acotada.

En consecuencia, las funciones propias se obtendrán de estudiar las soluciones no triviales del problema de contorno

$$\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} - \widetilde{\lambda}\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(L) = 0 \tag{3b.4}$$

- Para valores propios negativos ($\widetilde{\lambda} = -\mu^2$), el problema de contorno es

$$\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} + \mu^2\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(L) = 0 \tag{3b.5}$$

es decir un problema de Sturm-Liouville singular cuyas funciones propias (si existen) constituirán un conjunto ortogonal en el dominio $(0, L)$ respecto a la función de ponderación unidad.
La ecuación en derivadas parciales dada en (3b.5) se puede expresar como una ecuación diferencial de Bessel si se realiza el cambio de variable $z = 2\sqrt{-\widetilde{\lambda}x}$, esto es $z = 2\mu\sqrt{x}$, dado que

$$\Phi' = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{\mu}{\sqrt{x}}\frac{d\Phi(z)}{dz}; \qquad \frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(z\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) = \frac{\mu^2}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) \tag{3b.6}$$

que sustituidos en la ecuación diferencial de (3b.5) resulta

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) + z\Phi(z) = 0 \tag{3b.7}$$

Como se observa se trata de una ecuación diferencial de Bessel de orden 0 en la variable z. Su solución general es la combinación lineal

$$\Phi(z) = A\,J_0(z) + B\,Y_0(z) \tag{3b.8}$$

siendo $J_0(z)$ e $Y_0(z)$ las funciones de Bessel de primera clase y de segunda clase de orden 0 respectivamente. Si se deshace el cambio de variable $z = 2\mu\sqrt{x}$, se obtiene la solución general de la ecuación (3b.5):

$$\Phi(x) = A\,J_0(2\mu\sqrt{x}) + B\,Y_0(2\mu\sqrt{x}) \tag{3b.9}$$

La condición de singularidad "$\Phi(0)$ acotada" se satisface si y solo si en la solución no interviene la función de segunda clase Y_0 dado que $\lim_{x\to 0} Y_0(2\mu\sqrt{x}) \to -\infty$, por lo que $B = 0$.
Por otra parte, la condición de contorno $\Phi(L) = 0$ implica

$$\Phi(L) = 0 \to A\, J_0(2\mu\sqrt{L}) = 0 \tag{3b.10}$$

Así, si se denominan $\{\nu_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, al conjunto infinito de las raíces de la función de Bessel de primera clase de orden 0, es decir,

$$\boxed{J_0(\nu_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{3b.11}$$

entonces los valores de μ_n valen

$$\boxed{\mu_n = \frac{\nu_n}{2\sqrt{L}}, \quad n \in \mathbb{N}} \tag{3b.12}$$

En resumen los valores propios son $\widetilde{\lambda} = -\mu_n^2 = -\dfrac{\nu_n^2}{4L}$ y las funciones propias asociadas a dichos autovalores $\Phi_n(x) = J_0(2\mu_n\sqrt{x})$.

- Para valores propios nulos ($\widetilde{\lambda} = 0$), el problema de contorno es

$$\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(L) = 0 \tag{3b.13}$$

que no tiene funciones propias asociadas, al no existir ninguna solución no trivial de la forma general $\Phi(x) = A\ln(x) + B$ que satisfaga la condición de singularidad y la condición de contorno.

- Para valores propios positivos ($\widetilde{\lambda} = +\mu^2$), se obtiene el problema de Sturm-Liouville singular

$$\frac{d\left(x\Phi'\right)}{dx} - \mu^2\Phi = 0; \quad \Phi(0) \text{ acotada}, \quad \Phi(L) = 0 \tag{3b.14}$$

que al igual que en el caso de la ecuación en derivadas parciales dada en (3b.5) se puede expresar como una ecuación diferencial de Bessel mediante un cambio de variable de la forma $z = 2\sqrt{\widetilde{\lambda}x}$, esto es $z = 2\mu\sqrt{x}$, obteniéndose

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) - z\Phi(z) = 0 \tag{3b.15}$$

Como se observa se trata de una ecuación diferencial de Bessel *modificada* de orden 0 en la variable z. Su solución general es la combinación lineal

$$\Phi(z) = A\, I_0(z) + B\, K_0(z) \tag{3b.16}$$

siendo $I_0(z)$ y $K_0(z)$ las funciones de Bessel modificadas de primera clase y de segunda clase de orden 0 respectivamente. Si se deshace el cambio de variable $z = 2\mu\sqrt{x}$, se obtiene la solución general de la ecuación (3b.14):

$$\Phi(x) = A\, I_0(2\mu\sqrt{x}) + B\, K_0(2\mu\sqrt{x}) \tag{3b.17}$$

La condición de singularidad "$\Phi(0)$ acotada" se satisface si y solo si en la solución no interviene la función de segunda clase modificada K_0 dado que $\lim\limits_{x\to 0} K_0(2\mu\sqrt{x}) \to +\infty$, por lo que de nuevo $B = 0$.
Por otra parte, la condición de contorno $\Phi(L) = 0$ implica que debe satisfacerse la igualdad

$$\Phi(L) = 0 \to A\, I_0(2\mu\sqrt{L}) = 0 \tag{3b.18}$$

Sin embargo, dado que la función I_0 no tiene raíces en la recta real, no es posible obtener los valores de μ, y (3b.18) solo se satisface si $A = 0$, esto es con la solución trivial. En consecuencia, no existen funciones propias asociadas a autovalores positivos.

La resolución de la ecuación diferencial (3b.3.b), para los distintos valores propios $\widetilde{\lambda} = -\mu_n^2$ donde μ_n vienen dados por (3b.12) conduce a

$$T'' + \mu_n^2 g T = 0 \quad\longrightarrow\quad T_n(t) = C_n \operatorname{sen}(\mu_n\sqrt{g}\, t) + D_n \cos(\mu_n\sqrt{g}\, t) \tag{3b.19}$$

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (3b.1) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie generalizada de Fourier en términos de funciones de Bessel de primera clase de orden 0:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{sen}(\mu_n\sqrt{g}\, t) + D_n \cos(\mu_n\sqrt{g}\, t)\right) J_0(2\mu_n\sqrt{x})} \tag{3b.20}$$

Finalmente los coeficientes C_n y D_n se pueden obtener sin más que imponer que (3b.20) verifique las condiciones iniciales del problema. La condición inicial homogénea $u(x,0) = 0$ conduce a la identidad

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, J_0(2\mu_n\sqrt{x}) \tag{3b.21}$$

que se cumple si y solo si

$$\boxed{D_n = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{3b.22}$$

Por otra parte la condición inicial en velocidades $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$ donde la función $g(x)$ viene dada por $g(x) = \begin{cases} v\ ;\ 0 \le x \le \beta L \\ 0\ ;\ \beta L < x \le L \end{cases}$, conduce a la identidad

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mu_n \sqrt{g}\; J_0(2\mu_n\sqrt{x}) \tag{3b.23}$$

Introduciendo la función $g(x)$ y teniendo en cuenta que el conjunto de funciones propias es ortogonal en $(0, L)$ respecto a la función unidad —véase ecuación (3b.5)—, se obtienen los coeficientes C_n:

$$\boxed{C_n = \frac{v}{\mu_n\sqrt{g}} \frac{\displaystyle\int_0^{\beta L} J_0(2\mu_n\sqrt{s})\, ds}{\displaystyle\int_0^{L} J_0^2(2\mu_n\sqrt{s})\, ds}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{3b.24}$$

Si además se tienen en cuenta las siguientes propiedades integrales de las funciones de Bessel

$$\int_0^{\beta L} J_0(2\mu_n\sqrt{s})\, ds = \frac{2L\sqrt{\beta}}{\nu_n} J_1(\nu_n\sqrt{\beta}); \qquad \int_0^{L} J_0^2(2\mu_n\sqrt{s})\, ds = L\, J_1^2(\nu_n) \tag{3b.25}$$

los coeficientes C_n resultan ser

$$\boxed{C_n = \frac{4v}{\nu_n^2}\sqrt{\frac{\beta L}{g}}\, \frac{J_1(\nu_n\sqrt{\beta})}{J_1^2(\nu_n)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{3b.26}$$

En consecuencia, los desplazamientos horizontales del cable $u(x,t)$ vienen dados por la función (3b.20) con los coeficientes (3b.22) y (3b.26), donde μ_n se obtiene según (3b.12) y (3b.11).

4.– Se desea estudiar la distribución de temperaturas $u(x,t)$ a lo largo del tiempo de una barra metálica, de sección transversal constante, con superficie lateral aislada y formada por dos segmentos homogéneos de materiales distintos.

Si la barra se sitúa de forma que su eje coincida con el eje X y se denominan respectivamente a y b a las longitudes de ambos segmentos, de modo que su unión coincida con el origen, las propiedades de los materiales pueden expresarse por:

$$c(x) = \begin{cases} c_1, & -a < x < 0 \\ c_2, & 0 < x < b \end{cases}, \quad k(x) = \begin{cases} k_1, & -a < x < 0 \\ k_2, & 0 < x < b \end{cases}, \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & -a < x < 0 \\ \rho_2, & 0 < x < b \end{cases}$$

siendo $c(x)$ el calor específico, $\rho(x)$ la densidad y $k(x)$ la capacidad calorífica de la barra. Para cada material las propiedades c_1, c_2, k_1, k_2, ρ_1, y ρ_2 son constantes.

En todo momento los extremos de la barra se mantienen a una temperatura de referencia constante, e igual a 0. Asímismo se sabe que inicialmente la distribución de temperaturas es $f(x)$, $-a \le x \le b$, y que no hay fuentes de calor externas.

a) Demostrar que la ecuación diferencial que rige este problema es

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad -a < x < 0,\ 0 < x < b, \quad t > 0.$$

Dar explícitamente las condiciones iniciales y de contorno.

b) Dado que la barra está formada por dos piezas de materiales distintos, la resolución de este problema requerirá plantear dos problemas de contorno distintos. En la unión entre los dos segmentos, ¿qué dos condiciones de compatibilidad deben verificarse? Razonar la respuesta.

c) Aplicando la separación de variables $u(x,t) = \phi(x)T(t)$, demostrar que el problema se puede separar en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, que son:

$$\frac{dT(t)}{dt} - \lambda T = 0, \quad t > 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) - \lambda c(x)\rho(x)\phi(x) = 0, \quad -a < x < 0, \ 0 < x < b.$$

¿Cómo quedan las condiciones de contorno tras la separación de variables? ¿Qué condiciones verifica la función $\phi(x)$ en la unión entre los dos segmentos?

d) Si se considera la función $\phi(x)$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & -a < x < 0 \\ \phi_2(x), & 0 < x < b \end{cases},$$

demostrar que los dos problemas de contorno que se obtienen de la separación de variables son

$$\begin{cases} \phi_1''(x) - \lambda\alpha_1^2\phi_1(x) = 0, & -a < x < 0; \ \ \phi_1(-a) = 0 \\ \phi_2''(x) - \lambda\alpha_2^2\phi_2(x) = 0, & 0 < x < b; \ \ \phi_2(b) = 0 \end{cases},$$

relacionados por las condiciones en la unión,

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \ ; \qquad k_1\,\phi_1'(0) = k_2\,\phi_2'(0),$$

siendo $\alpha_1^2 = c_1\rho_1/k_1$ y $\alpha_2^2 = c_2\rho_2/k_2$.

e) En general los problemas de contorno con las condiciones definidas en el apartado anterior solamente admiten funciones propias para valores propios λ negativos ($\lambda_n = -\mu_n^2$, $n = 1, 2, ...$), salvo casos particulares para determinadas relaciones entre las constantes α_1, α_2, k_1, k_2 y la longitud de los dos segmentos que forman la barra.
Dar la expresión que permite obtener explícitamente los valores propios, y demostrar que las funciones propias correspondientes a cada valor propio son:

$$\phi_{1n} = \sin(\mu_n\alpha_1\,(x+a)) \ , \ -a < x < 0; \qquad \phi_{2n} = \sin(\mu_n\alpha_2\,(x-b)) \ , \ 0 < x < b.$$

f) Demostrar a continuación que la distribución de temperaturas $u(x,t)$ viene dada por la serie generalizada de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,\phi_n(x)\,e^{-\mu_n^2\,t},$$

donde la función $\phi_n(x)$ viene dada por

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \phi_{1n}(x), & -a < x < 0 \\ \phi_{2n}(x), & 0 < x < b \end{cases}.$$

g) Dar la expresión que permite evaluar los coeficientes u_n de la serie generalizada.

Solución 4.a) El problema propuesto consiste en estudiar la propagación del calor en una barra formada por dos materiales distintos. En consecuencia se puede plantear el principio de conservación de la energía a cualquier segmento de la barra tanto en el seno de un material como en el otro y deducir la ecuación del calor en cada medio. Las condiciones iniciales y de contorno son

$$u(-a,t) = 0 \quad u(b,t) = 0, \quad t \geq 0; \qquad u(x,0) = f(x), \quad -a \leq x \leq b \tag{4.1}$$

Solución 4.b) En la sección correspondiente a la unión entre los dos materiales, dado que la barra está aislada lateralmente, se satisfacerá continuidad de la temperatura y de los flujos de calor en esa sección (condición de "contacto térmico perfecto").

Solución 4.c) Aplicando la separación de variables $u(x,t) = \phi(x)T(t)$ la ecuación en derivadas parciales se separa en la forma

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{c\rho\phi}\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\phi}{dx}\right) \equiv \lambda \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T' - \lambda T = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{d\phi}{dx}\right) - \lambda c\rho\phi = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Las condiciones de contorno son lineales y homogéneas y se pueden expresar como

$$\phi(-a) = 0, \qquad \phi(b) = 0 \tag{4.3}$$

La condición de compatibilidad en la sección de unión de los dos materiales es de continuidad de la función ϕ y del flujo $-k\dfrac{d\phi}{dx}$.

Solución 4.d) Si la función $\phi(x)$ se define por segmentos de la forma $\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & -a < x < 0 \\ \phi_2(x), & 0 < x < b \end{cases}$, al sustituir en (4.2) se obtiene

$$\begin{cases} \phi_1''(x) - \lambda\dfrac{c_1\rho_1}{k_1}\phi_1(x) = 0, & -a < x < 0 \\ \phi_2''(x) - \lambda\dfrac{c_2\rho_2}{k_2}\phi_2(x) = 0, & 0 < x < b \end{cases}, \tag{4.4}$$

ya que las propiedades físicas de los materiales son constantes en cada uno de los dos segmentos de la barra. Por otra parte, las condiciones de contorno $\phi(-a) = 0$ y $\phi(b) = 0$ pasarán a ser respectivamente $\phi_1(-a) = 0$ y $\phi_2(b) = 0$, de acuerdo con la definición establecida de $\phi(x)$.

La condición de continuidad de la temperatura en la unión, esto es $\phi(0^-) = \phi(0^+)$, se traduce en $\phi_1(0) = \phi_2(0)$, y la de continuidad del flujo dada por $-k(0^-)\phi'(0^-) = -k(0^+)\phi'(0^+)$ quedará como $-k_1\phi_1'(0) = -k_2\phi_2'(0)$.

Solución 4.e) Dado que solamente existen valores propios negativos $\lambda = -\mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_1'' + \mu_n^2\alpha_1^2\phi_1 = 0, \quad -a < x < 0; \quad &\longrightarrow \quad \phi_1(x) = A_1 \operatorname{sen}(\mu_n\alpha_1 x) + B_1\cos(\mu_n\alpha_1 x) \\ \phi_2'' + \mu_n^2\alpha_2^2\phi_2 = 0, \quad 0 < x < b; \quad &\longrightarrow \quad \phi_2(x) = A_2 \operatorname{sen}(\mu_n\alpha_2 x) + B_2\cos(\mu_n\alpha_2 x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Los coeficientes A_1, A_2, B_1, B_2 verificarán además las siguientes relaciones como consecuencia de las condiciones de contorno y de compatibilidad

$$\begin{aligned} \phi_1(-a) = 0 \quad &\longrightarrow \quad 0 = -A_1\operatorname{sen}(\mu_n\alpha_1 a) + B_1\cos(\mu_n\alpha_1 a) \\ \phi_2(b) = 0 \quad &\longrightarrow \quad 0 = A_2\operatorname{sen}(\mu_n\alpha_2 b) + B_2\cos(\mu_n\alpha_2 b) \\ \phi_1(0) = \phi_2(0) \quad &\longrightarrow \quad B_1 = B_2 \\ -k_1\phi_1'(0) = -k_2\phi_2'(0) \quad &\longrightarrow \quad A_1 = \frac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1}A_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

que conducen a la ecuación algebraica

$$\boxed{\frac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2}\tan(\mu_n\alpha_2 b) + \tan(\mu_n\alpha_1 a) = 0} \tag{4.7}$$

cuyas raíces proporcionan los valores propios del problema.

En lo relativo a las funciones propias dado que $A_1\,\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 a) = B_1\cos(\mu_n\alpha_1 a)$ entonces

$$\begin{aligned}
\phi_{1n} &= A_1\,\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 x) + B_1\cos(\mu_n\alpha_1 x) = A_1\left(\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 x) + \frac{\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 a)}{\cos(\mu_n\alpha_1 a)}\cos(\mu_n\alpha_1 x)\right)\\
&= \frac{A_1}{\cos(\mu_n\alpha_1 a)}\left(\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 x)\cos(\mu_n\alpha_1 a) + \mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1 a)\cos(\mu_n\alpha_1 x)\right)\\
&= \mathit{Constante}_1 \quad \mathrm{sen}(\mu_n\alpha_1(x+a))
\end{aligned} \tag{4.8}$$

y por otra parte, dado que $A_1 = \frac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1}A_2$, $B_2 = B_1$ y $B_1 = A_1\tan(\mu_n\alpha_1 a)$ entonces

$$\begin{aligned}
\phi_{2n} &= A_1\left(\frac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2}\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_2 x) + \tan(\mu_n\alpha_1 a)\cos(\mu_n\alpha_2 x)\right)\\
&= A_1\frac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2}\left(\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_2 x) - \tan(\mu_n\alpha_2 b)\cos(\mu_n\alpha_2 x)\right)\\
&= A_1\frac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2\cos(\mu_n\alpha_2 b)}\left(\mathrm{sen}(\mu_n\alpha_2 x)\cos(\mu_n\alpha_2 b) - \mathrm{sen}(\mu_n\alpha_2 b)\cos(\mu_n\alpha_2 x)\right)\\
&= \mathit{Constante}_2 \quad \mathrm{sen}(\mu_n\alpha_2(x-b))
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde se ha hecho uso además de la relación $\tan(\mu_n\alpha_1 a) = -\frac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2}\tan(\mu_n\alpha_2 b)$.

Solución 4.f) La solución de la ecuación en la variable t de (4.2) vendrá dada por $T_n(t) = C_n e^{-\mu_n^2 t}$ por lo que aplicando el principio de superposición la solución vendrá dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,\phi_n(x)\,e^{-\mu_n^2 t}, \tag{4.10}$$

Solución 4.g) Los coeficientes u_n se obtienen de imponer la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Teniendo en cuenta que de acuerdo con el problema de contorno de (4.2) las funciones propias son ortogonales respecto $c(x)\rho(x)$ se obtiene

$$\int_{-a}^{b} c(s)\rho(s)f(s)\phi_n(s)ds = u_n\int_{-a}^{b} c(s)\rho(s)\phi_n^2(s)ds \tag{4.11}$$

por lo que los coeficientes vienen dados por

$$u_n = \frac{c_1\rho_1\displaystyle\int_{-a}^{0} f(s)\phi_{1n}(s)ds + c_2\rho_2\int_{0}^{b} f(s)\phi_{2n}(s)ds}{c_1\rho_1\displaystyle\int_{-a}^{0}\phi_{1n}^2(s)ds + c_2\rho_2\int_{0}^{b}\phi_{2n}^2(s)ds} \tag{4.12}$$
