CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 4

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden (Curso 2024–2025)

1.– Resolver el problema de valores iniciales para una onda unidireccional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \qquad u(x,t=0) = F(x),$$

siendo c una constante real y $f(x,t)$, $F(x)$ funciones conocidas.

Solución 1. Si la coordenada s es tal que $\left\{ \begin{array}{c} x \equiv x(s) \\ t \equiv t(s) \end{array} \right\}$, entonces $\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \longrightarrow t = s \\ &\frac{dx}{ds} = c; \quad x = \tau|_{s=0} \longrightarrow x = cs + \tau \\ &\frac{du}{ds} = f(x(s), t(s)); \quad u(\tau) = F(\tau)|_{s=0} \end{aligned}$$

La solución general de la EDO anterior es

$$u(\tau, s) = \int_0^s f(x(z), t(z))dz + \Psi(\tau).$$

Imponiendo la condición inicial $u(\tau) = F(\tau)$ en $s = 0$, se obtiene la solución particular

$$u(\tau, s) = \int_0^s f(\tau + cz, z)dz + F(\tau)$$

Deshaciendo el cambio de variables $\left\{ \begin{array}{l} s = t \\ \tau = x - ct \end{array} \right\}$, se obtiene la solución final del problema

$$\boxed{u(x,t) = F(x - ct) + \int_0^t f(x - ct + cz, z)dz}$$

2.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales para una onda unidireccional amortiguada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0, \qquad u(x,t=0) = F(x)$$

siendo c, λ constantes reales y $F(x)$ una función conocida.

Solución 2. Si la coordenada s es tal que $\left\{\begin{array}{c} x \equiv x(s) \\ t \equiv t(s) \end{array}\right\}$, entonces $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dt}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{array}{l} \dfrac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \longrightarrow t = s \\ \dfrac{dx}{ds} = c; \quad x = \tau|_{s=0} \longrightarrow x = cs + \tau \\ \dfrac{du}{ds} + \lambda u = 0; \quad u(\tau) = F(\tau)|_{s=0} \end{array}$$

La solución general de la EDO anterior es

$$u(\tau, s) = \Psi(\tau) e^{-\lambda s}.$$

Imponiendo la condición inicial $u(\tau) = F(\tau)$ en $s = 0$, se obtiene la solución particular

$$u(\tau, s) = F(\tau) e^{-\lambda s}$$

Deshaciendo el cambio de variables $\left\{\begin{array}{c} s = t \\ \tau = x - ct \end{array}\right\}$ se obtiene la solución final del problema

$$\boxed{u(x,t) = F(x - ct) e^{-\lambda t}}$$

3.– Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

Obtener asímismo la solución $v(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ del siguiente problema de valores iniciales en $\mathbb{R}^n$, que constituye el caso general del problema planteado anteriormente

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0; \quad v(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

siendo c_k constantes reales no nulas.

Solución 3. Si la coordenada s es tal que $\left\{\begin{array}{c} x \equiv x(s) \\ y \equiv y(s) \\ z \equiv z(s) \end{array}\right\}$, entonces $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{ds} = 1; \quad x = \tau_1|_{s=0} \longrightarrow x = s + \tau_1 \\ \dfrac{dy}{ds} = 1; \quad y = \tau_2|_{s=0} \longrightarrow y = s + \tau_2 \\ \dfrac{dz}{ds} = 1; \quad z = 0|_{s=0} \longrightarrow z = s \\ \dfrac{du}{ds} = 0; \quad u(\tau_1, \tau_2) = f(\tau_1, \tau_2)|_{s=0} \longrightarrow u(\tau_1, \tau_2, s) = f(\tau_1, \tau_2) \end{array}$$

En consecuencia, la solución es

$$\boxed{u(x, y, z) = f(x - z, y - z)}$$

Para resolver el problema generalizado

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0$$
$$v(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

siendo $c_k,\ k = 1, n$ constantes reales no nulas, se procede como sigue: suponemos que existe una coordenada s, tal que $x_k \equiv x_k(s)$, $k = 1, n$, entonces,

$$\frac{dv}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds}$$

Identificando con la EDP, obtenemos el sistema

$$\frac{dx_k}{ds} = c_k;\ k = 1, n$$
$$\frac{dv}{ds} = 0$$

y la condición inicial parametrizada es

$$x_k = \tau_k|_{s=0};\ k = 1, n-1$$
$$x_n = 0|_{s=0}$$
$$v(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, 0) = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1})$$

Resolviendo este sistema con las condiciones indicadas:

$$x_k = sc_k + \tau_k; k = 1, n-1$$
$$x_n = c_n s$$
$$v(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, s) = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1})$$

Haciendo el cambio de variables $\left\{ \begin{array}{l} s = x_n / c_n \\ \tau_k = x_k - \dfrac{c_k}{c_n} x_n;\ k = 1, n-1 \end{array} \right\}$

se obtiene la solución final

$$\boxed{v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(x_1 - \frac{c_1}{c_n} x_n, x_2 - \frac{c_2}{c_n} x_n, \ldots, x_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} x_n \right)}$$

4.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales correspondiente a las vibraciones de una cuerda de longitud suficientemente larga:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad u(x,0) = \begin{cases} 0 & ; \ -\infty < x < -a \\ h(1-x^2/c^2) & ; \ -a < x < +a \\ 0 & ; \ +a < x < +\infty \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, dibujar de forma cualitativa las rectas características en el plano (x,t), y obtener las expresiones cuantitativas del perfil de la cuerda $u(x,t)$ para valores de $t > 0$ cuando ésta se deja vibrar libremente.

Solución 4. La solución de D'Alembert para la ecuación de ondas es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{z=x-ct}^{z=x+ct} g(z)dz$$

En este caso $g(z) = 0$ y $f(z)$ es la condición inicial en desplazamientos. Así, en el plano de las características quedan definidas 6 regiones en las cuales la solución se construye con distintas funciones de las que definen en este ejemplo la condición inicial. Así tendremos:

- Región I: $(x-ct) < -a$ y $(x+ct) < -a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=0} + \underbrace{f(x+ct)}_{=0}\Big] = 0$$

- Región II: $(x-ct) < -a$ y $-a < (x+ct) < +a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=0} + \underbrace{f(x+ct)}_{=h(1-(x+ct)^2/c^2)}\Big] = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{(x+ct)^2}{c^2}\right)$$

- Región III: $(x-ct) < -a$ y $(x+ct) > a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=0} + \underbrace{f(x+ct)}_{=0}\Big] = 0$$

- Región IV: $-a < (x-ct) < +a$ y $(x+ct) > a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=h(1-(x-ct)^2/c^2)} + \underbrace{f(x+ct)}_{=0}\Big] = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{(x-ct)^2}{c^2}\right)$$

- Región V: $(x-ct) > a$ y $(x+ct) > a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=0} + \underbrace{f(x+ct)}_{=0}\Big] = 0$$

- Región VI: $-a < (x-ct) < +a$ y $-a < (x+ct) < a$, por lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x-ct)}_{=h(1-(x-ct)^2/c^2)} + \underbrace{f(x+ct)}_{=h(1-(x+ct)^2/c^2)}\Big] = h\left(1 - \frac{x^2}{c^2} - t^2\right)$$

5.– Considérese la ecuación de primer orden cuasilineal $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{dq(u)}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, donde el flujo viene dado por $q(u)=u^2/2$. Resolver los problemas de valores iniciales formados por esta ecuación diferencial parcial y las condiciones iniciales:

a) $u(x,t=0)=\begin{cases} 0; & x\le 0 \\ x/\alpha; & 0<x<\alpha \\ 1; & x\ge\alpha \end{cases}$ **b)** $u(x,t=0)=\begin{cases} 1; & x\le -1 \\ -x; & -1<x<0 \\ 0; & x\ge 0 \end{cases}$

Solución 5.a) La condición inicial viene dada por

$$u(x,0)=\begin{cases} 0; & x\le 0 \\ x/\alpha; & 0<x<\alpha \\ 1; & x\ge\alpha \end{cases}$$

La ecuación es $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ y la solución para el caso de una condición inicial genérica de la forma $u(x,0)=f(x)$ es $u=f(x-ut)$. Las rectas características son $x-ut=\tau$. Por tanto, la solución en el dominio de las características vendrá dada por:

$$u(\tau,s)=f(\tau)=\begin{cases} 0; & \tau\le 0 \\ \tau/\alpha; & 0<\tau<\alpha \\ 1; & \tau\ge\alpha \end{cases}$$

Atendiendo a los dominios de la condición inicial, las rectas características para distintos valores de x son:

$$\begin{cases} \tau\le 0 & \longrightarrow & \tau=x-ut|_{u=0} & \longrightarrow & \tau=x \\ 0<\tau<\alpha & \longrightarrow & \tau=x-ut|_{u=\tau/\alpha} & \longrightarrow & \tau=\dfrac{x}{1+t/\alpha} \\ \tau\ge\alpha & \longrightarrow & \tau=x-ut|_{u=1} & \longrightarrow & \tau=x-t \end{cases}$$

Si se representan las rectas características, se observa que el esquema corresponde a la propagación de una onda de expansión. Así, la solución será:

$$\boxed{u(x,t)=\begin{cases} 0; & x\le 0 \\ \dfrac{x}{t+\alpha}; & 0<x<(t+\alpha) \\ 1; & x\ge(t+\alpha) \end{cases}}$$

Solución 5.b) La solución es $u=f(x-ut)$ siendo $\tau=x-ut$, es decir:

$$u(s,\tau)=\begin{cases} 1; & \tau\le -1\longrightarrow\tau=x-t \\ -\tau; & -1<\tau<0\longrightarrow\tau=x/(1-t) \\ 0; & \tau\ge 0\longrightarrow\tau=x \end{cases}$$

Si se representan las rectas características se observa que se intersectan en el punto $(0,1)$ del plano (x,t). Este hecho indica la generación de una onda de choque a partir del instante de tiempo de la intersección ($t = 1$) que corresponde a la singularidad de $\tau = x/(1-t)$. En consecuencia la solución para $t < 1$ es:

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} 1; & x \leq (t-1) \\ \dfrac{x}{t-1}; & (t-1) < x < 0 \\ 0; & x \geq 0 \end{cases}}$$

que corresponde a una onda de compresión.

Para $t = 1$ y en el punto $x = 0$ se produce una onda de choque y su propagación no se puede regir por la EDP, ya que la ecuación es singular. La velocidad de propagación de la onda de choque se puede obtener de la condición de Rankine-Hugoniot como sigue:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\text{Choque}} = \frac{q(u^-) - q(u^+)}{u^- - u^+}$$

donde $q = u^2/2$ y $u^- = 1$, $u^+ = 0$, por lo que $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\text{Choque}} = 1/2$. En consecuencia, para $t \geq 1$

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} 1; & x < (t-1)/2 \\ 0; & x > (t-1)/2 \end{cases}}$$

6.– Obtener, por el método de las características, la solución $u(x,y,z)$ del siguiente problema de valores iniciales caracterizado por una ecuación diferencial de primer orden cuasilineal:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = u^2, \qquad u(x,y,0) = x + y.$$

Solución 6. Si la coordenada s es tal que $\left\{\begin{matrix} x \equiv x(s) \\ y \equiv y(s) \\ z \equiv z(s) \end{matrix}\right\}$, entonces $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}$.

Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{ds} = 1; \quad x = \tau_1|_{s=0} \longrightarrow x = s + \tau_1 \\
&\frac{dy}{ds} = 1; \quad y = \tau_2|_{s=0} \longrightarrow y = s + \tau_2 \\
&\frac{dz}{ds} = 1; \quad z = 0|_{s=0} \longrightarrow z = s \\
&\frac{du}{ds} = u^2; \quad u(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2|_{s=0}
\end{aligned}$$

La solución particular del problema de valores iniciales anterior viene dada por:

$$-\frac{1}{u(s,\tau_1,\tau_2)} = s - \frac{1}{\tau_1+\tau_2}$$

Deshaciendo el cambio de variables $\left\{\begin{array}{l}\tau_1 = x - s\\ \tau_2 = y - s\\ s = z\end{array}\right\}$, tendremos la solución final del problema, esto es,

$$\boxed{u(x,y,z) = \frac{x+y-2z}{1-(x+y-2z)z}}$$

7.– Las ecuaciones unidimensionales de Euler de flujo isentrópico de un fluido vienen dadas, en la hipótesis de que la presión sea constante, por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \quad u(x,t=0) = f(x)\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0; \quad \rho(x,t=0) = g(x)\end{aligned}$$

Obtener las expresiones generales de la velocidad u y la densidad ρ del fluido en cualquier punto x y en cualquier instante de tiempo t.

Solución 7. El sistema de ecuaciones a resolver está desacoplado y, por tanto, se puede resolver la primera ecuación (y obtener u) y substituir en la segunda para obtener ρ. La solución de la primera ecuación es $u(x,t) = f(x-ut)$.

Para resolver la segunda ecuación se necesita $\frac{\partial u}{\partial x}$. Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-ut)\frac{\partial(x-ut)}{\partial x} = f'(x-ut)\left(1 - t\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f'(x-ut)}{1+tf'(x-ut)}$$

Procedemos a continuación a parametrizar la segunda ecuación del sistema. Para ello introducimos una coordenada s tal que $\left\{\begin{array}{c} x \equiv x(s)\\ t \equiv t(s)\end{array}\right\}$. En ese caso $\frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{dt}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \longrightarrow t = s\\ &\frac{dx}{ds} = u; \quad x = \tau|_{s=0} \longrightarrow x = us + \tau\\ &\frac{d\rho}{ds} = -\rho\frac{f'(x-ut)}{1+tf'(x-ut)}; \quad \rho(\tau) = g(\tau)|_{s=0}\end{aligned}$$

Obtenemos, por tanto, el siguiente problema de valores iniciales

$$\frac{d\rho}{ds} = -\rho\frac{f'(\tau)}{1+sf'(\tau)}$$
$$\rho(\tau) = g(\tau);\ s=0$$

cuya solución es

$$\rho(s,\tau) = \frac{g(\tau)}{1+sf'(\tau)}$$

Deshaciendo el cambio de variables $\left\{\begin{array}{c} s=t \\ \tau = x-ut \end{array}\right\}$, se obtiene la solución final del problema

$$\boxed{\rho(x,t) = \frac{g(x-ut)}{1+tf'(x-ut)}}$$

8.– Resolver el problema de valores iniciales siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = x, \qquad u(x,0) = f(x)$$

y obtener la solución en forma paramétrica $u(s,\tau)$, dando las expresiones explícitas de $x(s,\tau)$ y de $t(s,\tau)$.

Obtener asímismo la solución $u(x,t)$ cuando $f(x)=1$ y $f(x)=x$.

Solución 8. Si la coordenada s es tal que $\left\{\begin{array}{c} x\equiv x(s) \\ t\equiv t(s) \end{array}\right\}$, entonces $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dt}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\frac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \longrightarrow t = s$$
$$\frac{dx}{ds} = u; \quad x = \tau|_{s=0}$$
$$\frac{du}{ds} = x; \quad u(\tau) = f(\tau)|_{s=0}$$

Las dos últimas EDO's constituyen un sistema acoplado. Sin embargo, es posible desacoplar las dos ecuaciones procediendo del siguiente modo:

$$\frac{dx}{ds} = u \longrightarrow \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{du}{ds} \longrightarrow \frac{d^2x}{ds^2} = x$$

Para resolver esta EDO se precisan dos condiciones iniciales. Disponemos de la condición

$$x = \tau|_{s=0}$$

Además,

$$\frac{dx}{ds} = u \quad \text{y} \quad u(\tau) = f(\tau)|_{s=0} \Longrightarrow \frac{dx}{ds}|_{s=0} = f(\tau)$$

En consecuencia hay que resolver

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{ds^2} - x = 0 \\ x = \tau|_{s=0} \\ \dfrac{dx}{ds} = f|_{s=0} \end{array}\right\}$$

La solución del problema anterior es $x(s,\tau) = \tau\text{Ch}(s) + f(\tau)\text{Sh}(s)$ y la solución u se puede obtener sin más que derivar $x(s)$, ya que $u = \frac{dx}{ds}$, es decir:

$$u(s,\tau) = \tau\text{Sh}(s) + f(\tau)\text{Ch}(s) \quad \text{siendo} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \tau\text{Ch}(s) + f(\tau)\text{Sh}(s) \\ t = s \end{array}\right\}$$

A continuación, particularizaremos esta solución para las condiciones iniciales propuestas:

• Si $f(x) = 1$, entonces

$$u = \tau\text{Sh}(s) + \text{Ch}(s) \quad \text{siendo} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \tau\text{Ch}(s) + \text{Sh}(s) \\ t = s \end{array}\right\}$$

En este caso se puede obtener explícitamente el valor de τ en función de x y t. Si se substituye la expresión de τ en la solución parametrizada, se obtiene la solución final

$$\boxed{u(x,t) = \frac{x\text{Sh}(t) + 1}{\text{Ch}(t)}}$$

• Si $f(x) = x$, entonces

$$u = \tau\left(\text{Sh}(s) + \text{Ch}(s)\right) \quad \text{siendo} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \tau\left(\text{Ch}(s) + \text{Sh}(s)\right) \\ t = s \end{array}\right\}$$

y la solución es

$$\boxed{u(x,t) = x}$$

9.– Un modelo matemático sencillo del tráfico de vehículos por una carretera congestionada se puede expresar en términos de una ecuación diferencial de primer orden no lineal. Así, si se denomina $\rho(x,t)$ a la *densidad de tráfico* (número de coches por kilómetro en un instante de tiempo t y en un punto x) y $q(x,t)$ a la *intensidad de tráfico* (número de vehículos por hora que pasan por un punto x en un instante t), y se considera que en la zona de estudio el número de carriles de circulación de la carretera no varía, y no hay incorporaciones ni salidas en ese tramo, se verifica $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0$. La densidad de tráfico y la intensidad están relacionadas a través de la velocidad de circulación de los vehículos u, de modo que $q = \rho\, u$. En el caso que nos ocupa, se sabe que la velocidad de avance es función de la densidad de la siguiente forma: $u(\rho) = u_{max}\,(1 - \rho/\rho_{max})$ siendo u_{max} y ρ_{max} valores constantes y conocidos.

Obtener la densidad de tráfico ρ y la velocidad de avance u cuando los vehículos están parados en un semáforo en rojo y éste cambia a verde, lo que en términos matemáticos se puede representar cuando la densidad de tráfico inicial viene dada por $\rho(x,0) = \rho_{max}$ si $x < 0$, y $\rho(x,0) = 0$ si $x > 0$.

Solución 9. Si denotamos por $\widehat{u}$ y $\widehat{\rho}$ la velocidad y densidad máximas respectivamente, la intensidad de tráfico viene dada por

$$q = \widehat{u}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\widehat{\rho}}\right) \quad \text{y, por tanto,} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \widehat{u}\left(1 - \frac{2\rho}{\widehat{\rho}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

En consecuencia, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \widehat{u}\left(1 - \frac{2\rho}{\widehat{\rho}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ &\rho(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

Si el parámetro s es tal que $\left\{\begin{matrix} x \equiv x(s) \\ t \equiv t(s) \end{matrix}\right\}$ se verifica que $\dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\dfrac{dt}{ds}$. Identificando con la EDP y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \longrightarrow t = s \\ &\frac{dx}{ds} = \widehat{u}\left(1 - \frac{2\rho}{\widehat{\rho}}\right); \quad x = \tau|_{s=0} \longrightarrow x = \widehat{u}\left(1 - \frac{2\rho}{\widehat{\rho}}\right)s + \tau \\ &\frac{d\rho}{ds} = 0; \quad u(\tau) = f(\tau)|_{s=0} \longrightarrow \rho(s,\tau) = f(\tau) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución para una condición inicial f es

$$\rho(s,\tau) = f(\tau); \quad \tau = x - \widehat{u}\left(1 - \frac{2\rho}{\widehat{\rho}}\right)t$$

En este ejemplo la condición inicial viene dada por la función

$$f(z) = \begin{cases} \widehat{\rho} & ; \quad z < 0 \\ 0 & ; \quad z > 0 \end{cases}$$

por lo que la solución es:

$$\rho(s,\tau) = \begin{cases} \widehat{\rho} & ; \quad \tau < 0 \\ 0 & ; \quad \tau > 0 \end{cases}$$

Deshaciendo los cambios de coordenadas con $\tau = x - \widehat{u}(1 - 2\rho/\widehat{\rho})t$ obtenemos

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \widehat{\rho} & ; \quad (x + \widehat{u}t) < 0 \\ 0 & ; \quad (x - \widehat{u}t) > 0 \end{cases}$$

Como se observa, la solución no abarca todo el dominio y falta por resolver la región $-\widehat{u}t < x < +\widehat{u}t$. En el plano de las características se observa un dominio de características en abanico. En este dominio todas las características pasan por $\tau = 0$. En consecuencia la solución ρ se obtiene de $\tau = x - \widehat{u}(1 - 2\rho/\widehat{\rho})t$ cuando $\tau = 0$. Por tanto,

$$\rho = \frac{\widehat{\rho}}{2}\left(1 - \frac{x}{\widehat{u}t}\right)$$

La densidad de tráfico es:

$$\boxed{\rho(x,t) = \begin{cases} \widehat{\rho} & ; \quad x < -\widehat{u}t \\ \dfrac{\widehat{\rho}}{2}\left(1 - \dfrac{x}{\widehat{u}t}\right) & ; \quad -\widehat{u}t \le x \le +\widehat{u}t \\ 0 & ; \quad x > \widehat{u}t \end{cases}}$$

La velocidad de los vehículos se obtiene de la expresión $u = \widehat{u}(1 - \rho/\widehat{\rho})$, es decir:

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < -\widehat{u}t \\ \dfrac{\widehat{u}}{2}\left(1 + \dfrac{x}{\widehat{u}t}\right) & ; \quad -\widehat{u}t \le x \le +\widehat{u}t \\ \widehat{u} & ; \quad x > \widehat{u}t \end{cases}}$$