CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 3

Clasificación de EDP’s de Segundo Orden (Curso 2023–2024)

1.– Determinar los dominios en los cuales las siguientes ecuaciones son hiperbólicas, parabólicas o elípticas y reducirlas a las respectivas formas canónicas, previa obtención de las ecuaciones y curvas características:

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2$ **b)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy}-x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ **d)** $\sin^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin(2x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy}+\cos^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x$

Solución 1.a) La clasificación y consiguiente reducción a una forma canónica de las ecuaciones en derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$ requiere determinar los valores de las funciones $A(x,y)$, $B(x,y)$ y $C(x,y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial. En este caso:

$$A(x,y)=x;\ B(x,y)=0;\ C(x,y)=1 \ \rightarrow\ B^2-4AC=-4x \ \rightarrow \begin{cases} \text{si } x<0 & \text{EDP Hiperbólica} \\ \text{si } x=0 & \text{EDP Parabólica} \\ \text{si } x>0 & \text{EDP Elíptica} \end{cases}$$

EDP Hiperbólica ($x<0$)

La ecuación diferencial característica es $y'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=y+2\sqrt{-x},\qquad \eta=y-2\sqrt{-x}$$

Una vez conocidas las funciones $\xi(x,y),\eta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\xi\eta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\eta}=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)^4-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right)}$$

EDP Parabólica ($x=0$)

La forma canónica es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2$.

EDP Elíptica ($x>0$)

La ecuación diferencial característica es $y'=\pm\dfrac{i}{\sqrt{x}}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=y+2i\sqrt{x},\qquad \eta=y-2i\sqrt{x}$$

Dado que son funciones complejas es más útil efectuar un nuevo cambio de variable antes de obtener la forma canónica. Concretamente:

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2i}\qquad\longrightarrow\qquad \alpha=y,\quad \beta=2\sqrt{x}$$

Una vez conocidas las funciones $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\alpha\beta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales elíptica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\frac{\beta^4}{16}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}}$$

Solución 1.b) Las funciones $A(x,y)$, $B(x,y)$ y $C(x,y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A=1;\ B=0;\ C=xy \quad\rightarrow\quad B^2-4AC=-4xy \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\text{si } xy<0 & \text{EDP Hiperbólica}\\ \text{si } xy=0 & \text{EDP Parabólica}\\ \text{si } xy>0 & \text{EDP Elíptica}\end{cases}$$

EDP Hiperbólica $(xy<0)$

La ecuación diferencial característica es $y'=\pm\sqrt{|xy|}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=\sqrt{|y|}-\frac{|x|^{3/2}}{3},\qquad \eta=\sqrt{|y|}+\frac{|x|^{3/2}}{3}$$

Una vez conocidas las funciones $\xi(x,y),\eta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\xi\eta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\eta}=\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{2(\xi+\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)-\frac{(\eta+\xi)^2}{4(3(\eta-\xi)/2)^{2/3}}}$$

EDP Parabólica $(xy=0)$

La forma canónica es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y$ si $x=0$, y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ si $y=0$.

EDP Elíptica $(xy>0)$

La ecuación diferencial característica es $y'=\pm 2i\sqrt{|xy|}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=\sqrt{|y|}-i\frac{|x|^{3/2}}{3},\qquad \eta=\sqrt{|y|}+i\frac{|x|^{3/2}}{3}$$

Dado que son funciones complejas es más útil efectuar un nuevo cambio de variable antes de obtener la forma canónica. Concretamente:

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2i}\qquad\longrightarrow\qquad \alpha=\sqrt{|y|},\quad \beta=\frac{|x|^{3/2}}{3}$$

Una vez conocidas las funciones $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\alpha\beta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales elíptica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}=\frac{-1}{3\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\alpha^2}{4(3\beta/2)^{2/3}}}$$

Solución 1.c) Las funciones $A(x,y)$, $B(x,y)$ y $C(x,y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A=1;\ B=1;\ C=-x \quad \rightarrow \quad B^2-4AC=1+4x \quad \rightarrow \begin{cases} \text{si } x>-1/4 \ \text{ EDP Hiperbólica} \\ \text{si } x=-1/4 \ \text{ EDP Parabólica} \\ \text{si } x<-1/4 \ \text{ EDP Elíptica} \end{cases}$$

EDP Hiperbólica $(x>-1/4)$

La ecuación diferencial característica es $y'=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=y-\frac{x}{2}+\frac{(1+4x)^{3/2}}{12}, \quad \eta=y-\frac{x}{2}-\frac{(1+4x)^{3/2}}{12}$$

Una vez conocidas las funciones $\xi(x,y),\eta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\xi\eta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\eta}=\frac{-1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}$$

EDP Parabólica $(x=-1/4)$

La ecuación diferencial característica es $y'=\dfrac{1}{2}$ cuya integración proporciona la curva característica $\xi=y-\frac{x}{2}$. El cambio en la variable η se elige arbitrariamente, por ejemplo: $\eta=y$. La forma canónica que se obtiene es

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0}$$

EDP Elíptica $(x<-1/4)$

La ecuación diferencial característica es $y'=\dfrac{1\pm i\sqrt{1+4x}}{2}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi=y-\frac{x}{2}+\frac{i(1+4x)^{3/2}}{12}, \quad \eta=y-\frac{x}{2}-\frac{i(1+4x)^{3/2}}{12}$$

Dado que son funciones complejas es más útil efectuar un nuevo cambio de variable antes de obtener la forma canónica. Concretamente:

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2i} \qquad \longrightarrow \qquad \alpha=y-\frac{x}{2}, \quad \beta=\frac{(1+4x)^{3/2}}{12}$$

Una vez conocidas las funciones $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\alpha\beta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales elíptica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{-1}{3\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}}$$

Solución 1.d) Las funciones $A(x,y)$, $B(x,y)$ y $C(x,y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A = \sin^2 x;\ B = \sin(2x);\ C = \cos^2 x \quad \rightarrow \quad B^2 - 4AC = 0 \quad \rightarrow \qquad \textbf{EDP Parabólica}\ \ \forall xy$$

La ecuación diferencial característica es $y' = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin^2 x}$ cuya integración proporciona la curva característica $\xi = y - \ln(\sin x)$.

El cambio en la variable η se elige arbitrariamente, por ejemplo: $\eta = y$. La forma canónica que se obtiene es

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\arcsin\left(e^{(\eta-\xi)} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right)}{1 - e^{2(\eta-\xi)}}}$$

2.– Considérese la ecuación diferencial: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Se pide:

a) Determinar los dominios en los que esta ecuación es hiperbólica, parabólica o elíptica.

b) Obtener, en cada caso, las ecuaciones y curvas características y reducir la ecuación a las correspondientes formas canónicas.

c) Obtener la solución general de la ecuación diferencial en el caso que sea hiperbólica.

Solución 2.a) Las funciones $A(x,y)$, $B(x,y)$ y $C(x,y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A = 1;\ B = 0;\ C = y \quad \rightarrow \quad B^2 - 4AC = -4y \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } y < 0 \ \text{ EDP Hiperbólica} \\ \text{si } y = 0 \ \text{ EDP Parabólica} \\ \text{si } y > 0 \ \text{ EDP Elíptica} \end{cases} \qquad \forall x$$

Solución 2.b) **Caso EDP Hiperbólica** $(y < 0)$

La ecuación diferencial característica es $y' = \pm\sqrt{-y}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi = -x - 2\sqrt{-y} \qquad \eta = +x - 2\sqrt{-y}$$

Una vez conocidas las funciones $\xi(x,y), \eta(x,y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\xi\eta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} = 0}$$

EDP Parabólica $(y = 0)$

La forma canónica es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

EDP Elíptica $(y > 0)$

La ecuación diferencial característica es $y' = \pm i\sqrt{y}$ cuya integración proporciona las curvas características

$$\xi = -x - 2i\sqrt{y} \qquad \eta = +x - 2i\sqrt{y}$$

Dado que son funciones complejas es más útil efectuar un nuevo cambio de variable antes de obtener la forma canónica. Por ejemplo:

$$\alpha = \frac{-\xi - \eta}{2i}, \quad \beta = \frac{-\xi + \eta}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = -2\sqrt{y}, \quad \beta = x$$

Una vez conocidas las funciones $\alpha(x, y), \beta(x, y)$ basta con aplicar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales respecto de las nuevas variables $\alpha\beta$ de la que resulta la ecuación en derivadas parciales elíptica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0}$$

Solución 2.c) La solución de la ecuación en derivadas parciales en el caso hiperbólico $(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} = 0)$ es $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ siendo f y g funciones arbitrarias.

Deshaciendo los cambios de variable, resulta la solución general de la EDP cuando $y < 0$:

$$\boxed{u(x, y) = f(-x - 2\sqrt{-y}) + g(+x - 2\sqrt{-y})}$$

3.– Obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

b) $r\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda^2 r\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\lambda^2\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} = 0$

Solución 3.a) Las funciones $A(x, y)$, $B(x, y)$ y $C(x, y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A = x^2;\ B = 2xy;\ C = y^2 \quad \rightarrow \quad B^2 - 4AC = 0 \quad \rightarrow \quad \textbf{EDP Parabólica } \forall xy$$

La ecuación diferencial característica es $y' = \frac{y}{x}$ cuya integración proporciona la curva característica $\xi = \frac{y}{x}$.

El cambio en la variable η se elige arbitrariamente, por ejemplo: $\eta = y$. La forma canónica que se obtiene es $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

Esta ecuación en derivadas parciales se puede resolver si denominamos $v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ por lo que la EDP queda de la forma

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + v = 0 \quad \longrightarrow \quad v(\xi, \eta) = f(\xi) e^{-\eta}$$

siendo f una función arbitraria. Sustituyendo este resultado en el cambio de función $v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ y volviendo a integrar, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi) e^{-\eta} \quad \longrightarrow \quad u(\xi, \eta) = -f(\xi) e^{-\eta} + g(\xi)$$

donde g es otra función arbitraria. Deshaciendo los cambios, resulta la solución general de la ecuación en derivadas parciales

$$\boxed{u(x, y) = -f(y/x) e^{-y} + g(y/x)}$$

Solución 3.b) En este caso, la ecuación en derivadas parciales se puede resolver efectuando el cambio de función $u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$, de modo que al aplicar la regla de la cadena y sustituir resulta la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$$

cuya solución general es $v(r, t) = f(r + \lambda t) + g(r - \lambda t)$, siendo f y g funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio de función, se obtiene la solución general de la ecuación propuesta

$$\boxed{u(r, t) = \frac{f(r + \lambda t) + g(r - \lambda t)}{r}}$$

Solución 3.c) Se trata de la ecuación de ondas cuya solución general es

$$\boxed{u(x, y) = f(y + x/\lambda) + g(y - x/\lambda)}$$

siendo f y g funciones arbitrarias.

Solución 3.d) Las funciones $A(x, y)$, $B(x, y)$ y $C(x, y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A = 1;\ B = 1;\ C = 0 \quad \rightarrow \quad B^2 - 4AC = 1 \quad \rightarrow \qquad \textbf{EDP Hiperbólica } \forall xy$$

Las ecuaciones diferenciales características son $y' = 1$ e $y' = 0$ cuya integración proporciona las rectas características

$$\xi = y - x, \quad \eta = y$$

Una vez conocidas las funciones $\xi(x, y), \eta(x, y)$ aplicando la regla de la cadena resulta la ecuación en derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} = 0$, cuya solución general es $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ donde f y g son funciones arbitrarias.

Deshaciendo los cambios, se obtiene

$$\boxed{u(x, y) = f(y - x) + g(y)}$$

4.– Discutir según los distintos valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, los dominios de x e y para los cuales la ecuación diferencial

$$(\lambda + x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial xy} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es parabólica, hiperbólica o elíptica.

Solución 4. Las funciones $A(x, y)$, $B(x, y)$ y $C(x, y)$ de la parte principal de la ecuación diferencial son

$$A = (\lambda + x);\ B = 2xy;\ C = -y^2 \quad \rightarrow \quad B^2 - 4AC = 4y^2(x^2 + x + \lambda) = 4y^2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\right)$$

Consecuentemente el carácter de la EDP dependerá del signo de $B^2 - 4AC$ cuya discusión es:

- si $\lambda > \frac{1}{4}$: Entonces el término $(\lambda - 1/4) > 0$, y la EDP es **parabólica** si $y = 0$, $\forall x$, e **hiperbólica** si $y \neq 0$, $\forall x$.
- si $\lambda = \frac{1}{4}$: Entonces el término $(\lambda - 1/4) = 0$, y la EDP es **parabólica** si $y = 0$, $\forall x$, **parabólica** si $y \neq 0$, $x = -1/2$, e **hiperbólica** si $y \neq 0$, $x \neq -1/2$.
- si $\lambda < \frac{1}{4}$: Entonces el término $(\lambda - 1/4) < 0$, y la EDP es **parabólica** si $y = 0$, $\forall x$. Si $y \neq 0$, dependiendo del punto x, el término $(x + 1/2)^2 - (1/4 - \lambda)$ puede ser positivo, nulo o negativo, por lo que la EDP es:

hiperbólica : si $x < -1/2 - \sqrt{1/4 - \lambda}$, $\forall y \neq 0$, ó si $x > -1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda}$, $\forall y \neq 0$

parabólica : si $x = -1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda}$, $\forall y \neq 0$, ó si $x = -1/2 - \sqrt{1/4 - \lambda}$, $\forall y \neq 0$

elíptica : si $-1/2 - \sqrt{1/4 - \lambda} < x < -1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda}$, $\forall y \neq 0$

5.– Establecer a qué tipo pertenecen las siguientes tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

a) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + u = 0$

b) $\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_3} + \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial u}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \dfrac{1}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - u = 0$

c) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_3} + \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + u = 0$

Solución 5.a) El objetivo es efectuar los cambios de variable necesarios para transformar la EDP original que depende de las variables x_i, $i = 1, n$ en otra de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + fu = g$$

que no contiene términos en derivadas cruzadas, y donde los coeficientes a_i son $+1$, -1 ó 0.

En el caso planteado en este apartado los cambios de variable se pueden obtener por simple inspección:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}x_2, \qquad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_3$$

Aplicando ahora la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales respecto de las nuevas variables ξ_i, $i = 1, n$, y sustituyendo en la ecuación diferencial original se obtiene la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} + u = 0$$

En esta nueva ecuación diferencial, todos los coeficientes de la parte principal a_i, $i = 1, n$ son no nulos y de dichos coeficientes todos excepto uno tienen el mismo signo, por lo que la ecuación en derivadas parciales es **hiperbólica**.

Solución 5.b) En este caso, el cambio de variable no es inmediato de obtener, por lo que se hace preciso plantear unos cambios de variable genéricos en forma del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \xi_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ \xi_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \\ \xi_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \end{cases}$$

Seguidamente se aplica la regla de la cadena, se calculan las derivadas parciales respecto de las nuevas variables independientes ξ_1, ξ_2, ξ_3 y se sustituyen en la ecuación en derivadas parciales original, obteniéndose una nueva EDP que depende de las variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, y donde intervienen también los coeficientes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. Dado que se pretende obtener una ecuación en derivadas parciales sin derivadas cruzadas y en el que los coeficientes de la parte principal, esto es, los que multiplican a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2}$, sean -1, $+1$ ó 0 podemos imponerlo planteando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1}{5}a_1a_3 + \frac{1}{2}a_2a_3 + \frac{1}{9}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3^2 = \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ +1 \end{array}\right. \\
\frac{1}{5}b_1b_3 + \frac{1}{2}b_2b_3 + \frac{1}{9}b_2^2 + \frac{1}{4}b_3^2 = \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ +1 \end{array}\right. \\
\frac{1}{5}c_1c_3 + \frac{1}{2}c_2c_3 + \frac{1}{9}c_2^2 + \frac{1}{4}c_3^2 = \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ +1 \end{array}\right. \\
\frac{1}{5}(a_3b_1 + b_3a_1) + \frac{1}{2}(a_3b_2 + b_3a_2) + \frac{2}{9}a_2b_2 + \frac{1}{2}a_3b_3 = 0 \\
\frac{1}{5}(a_3c_1 + c_3a_1) + \frac{1}{2}(a_3c_2 + c_3a_2) + \frac{2}{9}a_2c_2 + \frac{1}{2}a_3c_3 = 0 \\
\frac{1}{5}(b_3c_1 + c_3b_1) + \frac{1}{2}(b_3c_2 + c_3b_2) + \frac{2}{9}b_2c_2 + \frac{1}{2}b_3c_3 = 0
\end{array}\right.$$

Como puede comprobarse, se trata de un sistema de 6 ecuaciones no lineales con 9 incógnitas (los coeficientes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$). Eligiendo de forma conveniente el valor de tres de los coeficientes, se obtiene una solución a este sistema que viene dada por:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 2 \\
b_1 = -\frac{15}{2} & b_2 = 3 & b_3 = 0 \\
c_1 = -5 & c_2 = 0 & c_3 = 2
\end{array}\right.$$

por lo que los cambios de variables son:

$$\xi_1 = 2x_3 \qquad \xi_2 = -\frac{15}{2}x_1 + 3x_2 \qquad \xi_3 = -5x_1 + 2x_3$$

y la ecuación en derivadas parciales resultante es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} - \frac{15}{14}\frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{5}{7}\frac{\partial u}{\partial \xi_3} - u = 0$$

en la que todos los coeficientes de la parte principal son no nulos y de dichos coeficientes todos excepto uno tienen el mismo signo, por lo que la ecuación en derivadas parciales es **hiperbólica**.

Solución 5.c) Se resuelve siguiendo el mismo procedimiento que el descrito en el apartado anterior, planteando un cambio de variables genérico de la forma

$$\left\{\begin{array}{l}
\xi_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\
\xi_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\
\xi_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3
\end{array}\right.$$

Aplicando la regla de la cadena, obteniendo las derivadas parciales respecto de las nuevas variables, sustituyendo en la ecuación diferencial original, e imponiendo que la ecuación resultante no tenga derivadas parciales cruzadas y que los coeficientes de la parte principal sean -1, $+1$ ó 0 se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales cuyas incógnitas son los coeficientes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. Eligiendo de forma conveniente el valor de tres de los coeficientes, se obtiene una solución a este sistema que viene dada por:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 3 \\
b_1 = -1 & b_2 = 1 & b_3 = 0 \\
c_1 = 1 & c_2 = -1 & c_3 = 0
\end{array}\right.$$

por lo que los cambios de variables son:

$$\xi_1 = 3x_3 \qquad \xi_2 = -x_1 + x_2 \qquad \xi_3 = x_1 - x_2$$

y la ecuación en derivadas parciales resultante es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + u = 0$$

que se trata de una ecuación **parabólica**.

6.– Considérese el siguiente problema de Cauchy para la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Asumiendo que $f(x)$ es suficientemente diferenciable, construir la solución $u(x,t)$ como una serie de potencias en la variable t válida en el entorno del punto inicial $t = 0$, esto es,

$$u(x,t) = u(x,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} \frac{t^k}{k!}$$

Demostrar asímismo que si $f(x) = \sin(x)$ entonces la solución es $u(x,t) = \sin(x)e^{-\alpha^2 t}$.

Solución 6. Si se admite que en el entorno del instante inicial se verifica el desarrollo en serie de potencias en la variable t de la función $u(x,t)$, entonces dado que se conoce el valor de la solución en un instante por la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ y que se debe verificar la ecuación diferencial, se tiene que

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2}\right) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = \alpha^4 \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k-1} u(x,0)}{\partial t^{k-1}}\right) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{k-1} u(x,0)}{\partial t^{k-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = \alpha^{2k} \frac{d^{2k} f(x)}{dx^{2k}}$$

Sustituyendo las derivadas parciales temporales en la expresión del desarrollo en serie de potencias, se obtiene como solución del problema de valores iniciales la serie

$$\boxed{u(x,t) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2k} \frac{d^{2k} f(x)}{dx^{2k}} \frac{t^k}{k!}}$$

En el caso particular en que $f(x) = \sin x$ se verifica que $\dfrac{d^{2k} f(x)}{dx^{2k}} = (-1)^k \sin x$, por lo que la solución es

$$u(x,t) = \sin x + \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \alpha^{2k} \sin x \frac{t^k}{k!}\right) = \sin x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2 t)^k}{k!}\right) \quad \rightarrow \quad u(x,t) = \sin x\, e^{-\alpha^2 t}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2 t)^k}{k!}$ es el desarrollo en serie de la función $e^{-\alpha^2 t}$.
