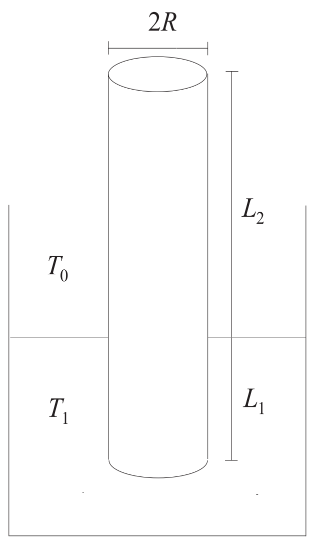
CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA **PRÁCTICA 2 bis**

Planteamiento de Modelos Matemáticos (II) (Curso 2023–2024)

1.– Se desea estudiar la disipación de calor en estado estacionario desde un baño que contiene un líquido a elevada temperatura a través de unas barras cilíndricas de acero parcialmente sumergidas en el baño (tal como se indica en la figura adjunta), de modo que el calor se disipa a la atmósfera circundante a través de dichas barras que actúan de extractores de calor. *[Este fenómeno se va a estudiar planteando modelos matemáticos distintos cuya complejidad irá aumentando dependiendo de las hipótesis que se consideren. En los casos en que se requieran ecuaciones diferenciales deben establecerse también las condiciones de contorno y/o iniciales que se precisen].*



Modelo 1

1.a) Plantear el problema si se asumen las siguientes hipótesis: **1.1)** la temperatura de la barra es uniforme (tanto en la parte sumergida en el baño como en el exterior); **1.2)** la transferencia de calor a través de la superficie de los dos extremos de la barra es despreciable; **1.3)** los coeficientes de transferencia de calor entre el líquido del baño y la barra (h_l), y entre la barra y la atmósfera (h_g), son conocidos y constantes; y **1.4)** no se produce transferencia de calor entre el líquido y la atmósfera directamente, y no hay evaporación.

1.b) Obtener la temperatura de la barra y el calor total transferido a la atmósfera.

Modelo 2

2.a) Plantear el problema si se asumen las hipótesis **1.2)**, **1.3)** y **1.4)**, y que: **2.1)** la temperatura de la barra es uniforme solamente en la parte sumergida en el baño, y en la parte exterior la temperatura de la barra es variable en la dirección axial; **2.2)** el flujo de calor se relaciona con la temperatura según la ley de Fourier; y **2.3)** la barra es homogénea por lo que su conductividad térmica es una constante.

2.b) Obtener la temperatura de la barra y el calor total transferido a la atmósfera.

<u>**Modelo 3**</u>

3.a) Plantear el problema si se asumen las hipótesis **1.2)**, **1.3)**, **1.4)**, **2.2)** y **2.3)**, y que: **3.1)** la temperatura de la barra es variable en la dirección axial tanto en la parte sumergida en el baño, como en la parte exterior en contacto con la atmósfera.

3.b) Obtener la temperatura de la barra y el calor total transferido a la atmósfera.

<u>**Modelo 4**</u>

4.a) Plantear el problema si se asumen las hipótesis **1.2)**, **1.3)**, **1.4)**, **2.2)** y **2.3)**, y que: **4.1)** la temperatura de la barra es uniforme en la parte sumergida en el baño, y en la parte exterior la temperatura de la barra es variable tanto en la dirección axial como en la radial.

<u>**Modelo 5**</u>

5.a) Plantear el problema si se asumen las hipótesis **1.2)**, **1.3)**, **1.4)**, **2.2)** y **2.3)**, y que: **5.1)** la temperatura de la barra es variable en la dirección axial y en la radial tanto en la parte sumergida en el baño, como en la parte exterior en contacto con la atmósfera.

Solución 1.

1.a) El balance de calor en estado estacionario en la barra es el calor entrante igual al calor saliente, esto es:

$$h_l\, 2\pi R\, L_1(T_1 - u) = h_g\, 2\pi R\, L_2(u - T_0)$$

siendo u la temperatura en toda la barra (que por hipótesis es constante). Despejando se obtiene la temperatura a lo largo de la barra:

$$\boxed{u = \frac{T_0 + \alpha T_1}{1+\alpha}; \qquad \alpha = \frac{h_l\, L_1}{h_g\, L_2}}$$

1.b) El calor total que se transfiere viene dado por $Q = h_l\, 2\pi\, R\, L_1\, (T_1 - u)$, en la que sustituyendo se obtiene

$$\boxed{Q = 2\pi\, R\, h_l\, L_1 \frac{1}{1+\alpha}(T_1 - T_0) = 2\pi\, R\, h_g\, L_2 \frac{\alpha}{1+\alpha}(T_1 - T_0)}$$

Solución 2.

2.a) En este caso se asume que existen gradientes de temperatura en la dirección axial en la parte de la barra expuesta al exterior. El balance de calor en la parte exterior es:

$$\pi\, R^2 q_2(x) - \pi\, R^2 q_2(x + \Delta x) = 2\pi R \Delta x h_g(u_2 - T_0)$$

siendo $u_2(x)$ la temperatura en la parte de la barra no sumergida en el baño, y $q_2(x)$ el flujo de calor que tiene lugar. Si se divide la expresión anterior entre Δx y se lleva al límite cuando $\Delta x \to 0$, resulta la ecuación

$$\frac{dq_2}{dx} = -\frac{2}{R} h_g(u_2 - T_0)$$

Si se sustituye la ley de Fourier $q_2(x) = -k\dfrac{du_2}{dx}$ siendo k la conductividad térmica de la barra, y se introducen las condiciones de contorno, se obtiene el siguiente problema diferencial lineal de segundo orden

$$\boxed{\begin{array}{c} k\dfrac{d^2u_2}{dx^2} = \dfrac{2}{R}h_g(u_2 - T_0), \quad 0 < x < L_2 \\ u_2(0) = u_1; \qquad q(L_2) = 0 \;\rightarrow\; k\dfrac{du_2(L_2)}{dx} = 0 \end{array}}$$

Es decir, en el extremo $x = 0$ la temperatura debe ser la misma que la de la parte de la barra sumergida en el baño (u_1) y que se asume constante en este modelo, y el extremo $x = L_2$ está aislado. La temperatura u_1 se obtiene de establecer un balance de calor con las dos partes de la barra.

2.b) La solución del problema de contorno planteado es

$$\boxed{u_2(x) = T_0 + (u_1 - T_0)\frac{\mathrm{Ch}(\beta(L_2 - x))}{\mathrm{Ch}(\beta L_2)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2h_g}{Rk}}}$$

La temperatura u_1 resulta de plantear que el calor entrante sea igual al saliente, esto es

$$h_l\, 2\pi R\, L_1(T_1 - u_1) = \pi R^2 q_2(0)$$

Dado que $q_2(x) = -k\dfrac{du_2}{dx}$ según la ley de Fourier, y el valor de $u_2(x)$ se conoce, basta con sustituir y despejar u_1, que resulta

$$\boxed{u_1 = \frac{T_0 + \dfrac{h_l\, L_1}{\eta\, h_g\, L_2}T_1}{1 + \dfrac{h_l\, L_1}{\eta\, h_g\, L_2}}; \quad \eta = \frac{\mathrm{Th}(\beta L_2)}{\beta L_2}}$$

Finalmente el calor total transferido es $Q = \pi R^2\, q_2(0)$ que despejando viene dado por

$$\boxed{Q = 2\pi\, R\, h_l\, L_1 \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha}{\eta}}(T_1 - T_0) = 2\pi\, R\, h_g\, L_2 \frac{\alpha}{1 + \dfrac{\alpha}{\eta}}(T_1 - T_0)}$$

siendo $\alpha = \dfrac{h_l\, L_1}{h_g\, L_2}$.

Solución 3.

3.a) En este modelo se asume que existen gradientes de temperatura en la dirección axial tanto en la parte de la barra sumergida en el baño como en la exterior. Planteando las ecuaciones de los flujos de calor en cada una de las dos partes de la barra, e introduciendo las condiciones de contorno se obtiene el siguiente problema consistente en un sistema de EDOs de segundo orden

$$\boxed{\begin{array}{c} k\dfrac{d^2u_1}{dx^2} = \dfrac{2}{R}h_l(u_1 - T_1), \quad -L_1 < x < 0 \\ k\dfrac{d^2u_2}{dx^2} = \dfrac{2}{R}h_g(u_2 - T_0), \quad 0 < x < L_2 \\ k\dfrac{du_1(-L_1)}{dx} = 0; \quad k\dfrac{du_2(L_2)}{dx} = 0; \quad u_1(0) = u_2(0); \quad \dfrac{du_1(0)}{dx} = \dfrac{du_2(0)}{dx} \end{array}}$$

siendo $u_1(x)$ y $u_2(x)$ las temperaturas en ambas partes de la barra.

3.b) La solución de este problema de contorno es

$$\boxed{\begin{array}{c} u_1(x) = T_1 + A_1 \operatorname{Ch}(\gamma(x + L_1)); \quad \gamma = \sqrt{\dfrac{2h_l}{Rk}} \\ u_2(x) = T_0 + A_2 \operatorname{Ch}(\beta(L_2 - x)); \quad \beta = \sqrt{\dfrac{2h_g}{Rk}} \end{array}}$$

siendo las constantes A_1 y A_2:

$$A_1 = \frac{T_0 - T_1}{\operatorname{Ch}(\gamma L_1) + \dfrac{\gamma \operatorname{Sh}(\gamma L_1)}{\beta \operatorname{Th}(\beta L_2)}}; \qquad A_2 = \frac{T_1 - T_0}{\operatorname{Ch}(\beta L_2) + \dfrac{\beta \operatorname{Sh}(\beta L_2)}{\gamma \operatorname{Th}(\gamma L_1)}}$$

El calor total que se transfiere puede obtenerse del flujo de calor en la sección correspondiente al punto $x = 0$, esto es $Q = \pi R^2\, q_2(0)$. Despejando, resulta

$$\boxed{Q = 2\pi\, R\, h_g\, L_2 \frac{\eta}{1 + \dfrac{\beta \operatorname{Th}(\beta L_2)}{\gamma \operatorname{Th}(\gamma L_1)}}(T_1 - T_0)}$$

Solución 4.

4.a) En este modelo se asume que existen gradientes de temperatura tanto en la dirección axial como en la dirección longitudinal en la parte de la barra no sumergida en el baño, en tanto que en la temperatura se asume uniforme en la parte sumergida de la barra. Sea $q_2(x, r)$ el flujo de calor en la dirección longitudinal de la barra y sea $\widehat{q}_2(x, r)$ el flujo de calor en la dirección radial de la barra cilíndrica. Así, el balance de calor que se produce en un volumen de longitud diferencial Δx (planteado en la dirección axial en un punto $x < \tilde{x} < x + \Delta x$) y de incremento radial Δr (planteado en la dirección radial en un punto $r < \tilde{r} < r + \Delta r$) es

$$\begin{aligned} &2\pi r \Delta x\, \widehat{q}_2(\tilde{x}, r) - 2\pi(r + \Delta r)\Delta x\, \widehat{q}_2(\tilde{x}, r + \Delta r) \\ &+2\pi\tilde{r}\Delta r\, q_2(x, \tilde{r}) - 2\pi\tilde{r}\Delta r\, q_2(x + \Delta x, \tilde{r}) = 0; \quad r < \tilde{r} < r + \Delta r, \quad x < \tilde{x} < x + \Delta x \end{aligned}$$

Dividiendo esta expresión entre $2\pi\Delta x\Delta r$ y llevando al límite cuando ambos incrementos tienden a 0, resulta la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \widehat{q}_2(x, r)\right) + r\frac{\partial q_2(x, r)}{\partial x} = 0; \quad 0 < r < R, \quad 0 < x < L_2$$

y si se sustituye las leyes de Fourier correspondientes a los flujos de calor en las direcciones longitudinal $q_2(x, r) = -k\frac{\partial u_2}{\partial x}$ y radial $\widehat{q}_2(x, r) = -k\frac{\partial u_2}{\partial r}$, asumiendo que la conductividad térmica es la misma en ambas direcciones y constante, se obtiene la EDP

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0; \quad 0 < r < R, \quad 0 < x < L_2}$$

siendo $u_2(x, r)$ la distribución de temperaturas en la parte exterior de la barra.

Las condiciones de contorno en este caso son:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u_2(0, x)}{\partial r} &= 0; \quad 0 \le x \le L_2 \\ -k\frac{\partial u_2(R, x)}{\partial r} &= h_g(u_2(R, x) - T_0); \quad 0 \le x \le L_2 \\ u_2(r, 0) &= u_1; \quad 0 \le r \le R \\ \frac{\partial u_2(r, L_2)}{\partial x} &= 0; \quad 0 \le r \le R \end{aligned}}$$

siendo u_1 la temperatura de la barra en la parte sumergida y que se asume uniforme. Como en el caso del modelo **2**, su valor se obtiene de imponer que los flujos de calor entrantes y salientes a través de la sección transversal correspondiente al punto $x = 0$ son iguales, esto es:

$$\boxed{h_l\, 2\pi R\, L_1(T_1 - u_1) = \int_0^R 2\pi r\, q_2(r, 0)\, dr}$$

Solución 5.

5.a) Este es el caso más general de los que se plantean en este problema y se asume que se producen gradientes en las direcciones longitudinales y radiales tanto en la parte de la barra sumergida en el baño como en la exterior. Planteando los flujos de calor respectivos, de modo análogo al realizado para el modelo **4**, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\widehat{q}_1(x,r)\right) + r\frac{\partial q_1(x,r)}{\partial x} &= 0; \quad 0 < r < R, \quad -L_1 < x < 0 \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\widehat{q}_2(x,r)\right) + r\frac{\partial q_2(x,r)}{\partial x} &= 0; \quad 0 < r < R, \quad 0 < x < L_2
\end{aligned}$$

y si se sustituye las leyes de Fourier correspondientes a los flujos de calor en las direcciones longitudinales $q_1(x,r) = -k\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $q_2(x,r) = -k\frac{\partial u_2}{\partial x}$ y radiales $\widehat{q}_1(x,r) = -k\frac{\partial u_1}{\partial r}$, $\widehat{q}_2(x,r) = -k\frac{\partial u_2}{\partial r}$, asumiendo que la conductividad térmica es la misma en ambas direcciones y constante, se obtiene el sistema de EDPs

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 0; \quad 0 < r < R, \quad -L_1 < x < 0 \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= 0; \quad 0 < r < R, \quad 0 < x < L_2
\end{aligned}}$$

Finalmente, las condiciones de contorno en este caso son:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial u_1(0,x)}{\partial r} &= 0; \quad -L_1 \le x \le 0 \\
-k\frac{\partial u_1(R,x)}{\partial r} &= h_l(u_1(R,x) - T_1); \quad -L_1 \le x \le 0 \\
\frac{\partial u_2(0,x)}{\partial r} &= 0; \quad 0 \le x \le L_2 \\
-k\frac{\partial u_2(R,x)}{\partial r} &= h_g(u_2(R,x) - T_0); \quad 0 \le x \le L_2 \\
\frac{\partial u_1(r,-L_1)}{\partial x} &= 0; \quad 0 \le r \le R \\
\frac{\partial u_2(r,L_2)}{\partial x} &= 0; \quad 0 \le r \le R \\
u_1(r,0) &= u_2(r,0); \quad 0 \le r \le R \\
\frac{\partial u_1(r,0)}{\partial x} &= \frac{\partial u_2(r,0)}{\partial x}; \quad 0 \le r \le R
\end{aligned}}$$