CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 2

Planteamiento de Modelos Matemáticos (Curso 2023–2024)

1.– Considérese una barra unidimensional con propiedades físicas y geométricas (área y perímetro) constantes, sin fuentes de calor internas y cuya superficie lateral no se encuentra aislada.

a) Deducir la ecuación en derivadas parciales que relaciona la temperatura u en cada punto x de la barra y en cada instante t, si la energía térmica perdida por la pared lateral por unidad de superficie y de tiempo viene dada por una función conocida $q(x,t)$.

b) Deducir la ecuación en derivadas parciales que relaciona la temperatura u en cada punto x de la barra y en cada instante t, si la energía térmica perdida por la pared lateral por unidad de superficie y de tiempo $q(x,t)$ es proporcional a la diferencia de temperatura en la barra y la temperatura exterior conocida $U(x,t)$.

Solución 1.a) Sean $A(x)$ y $p(x)$ el área de la sección transversal y el perímetro en cada punto x de la barra. Sean $e(x,t)$ la energía térmica por unidad de volumen, $E(t)$ la energía total, $\phi(x,t)$ el flujo de calor, $Q(x,t)$ las fuentes de calor internas y $q(x,t)$ la energía térmica perdida por la pared lateral por unidad de superficie y de tiempo.

El planteamiento del principio de conservación de la energía entre dos puntos arbitrarios x_0 y x_1 del interior del dominio es

$$\frac{dE(t)}{dt} = \phi(x_0,t)A(x_0) - \phi(x_1,t)A(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t)A(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} q(x,t)p(x)dx$$

es decir

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} e(x,t)A(x)dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial(\phi(x,t)A(x))}{\partial x}dx + \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t)A(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} q(x,t)p(x)dx$$

Si se tiene en cuenta la regla de Leibnitz de derivación de integrales de funciones de varias variables y se agrupan términos, resulta

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}A(x) + \frac{\partial(\phi(x,t)A(x))}{\partial x} - Q(x,t)A(x) + q(x,t)p(x) \right) dx = 0$$

identidad que se satisface para cualesquiera puntos arbitrarios si se cumple la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}A(x) + \frac{\partial(\phi(x,t)A(x))}{\partial x} - Q(x,t)A(x) + q(x,t)p(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Finalmente, en ausencia de fuentes internas de calor, expresando la energía térmica por unidad de volumen en términos de propiedades físicas del material (calor específico c y densidad ρ) y de una magnitud macroscópica (temperatura u), esto es, $e = c\,\rho\,u$, y si se admite que se verifica la ley de Fourier $\phi = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$, se obtiene la EDP:

$$\boxed{A\frac{\partial(c\,\rho\,u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\,k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q\,p, \quad 0 < x < L, \quad t > 0}$$

En el caso de que las propiedades físicas del material sean constantes, la ecuación resulta de la forma

$$c\,\rho\,A\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(A\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q\,p, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

y si el área de la sección transversal es constante, obtenemos

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q\,\frac{p}{A}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Solución 1.b) Si la energía que se pierde por la superficie lateral es $q(x,t) = h(u(x,t) - U(x,t))$ siendo h una constante de proporcionalidad ($h > 0$) y $U(x,t)$ la temperatura exterior, la ecuación diferencial en derivadas parciales es

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h\,p}{A}u = \frac{h\,p}{A}U, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

en la hipótesis de que todas las propiedades físicas del material y el área de la sección transversal son constantes.

2.– Una barra metálica homogénea, perfectamente elástica y de área de sección transversal constante se cuelga verticalmente del techo de un ascensor, de modo que el extremo superior de la barra queda fijo. El ascensor baja en caída libre hasta el momento en que alcanza una velocidad v_1 en el que se detiene instantáneamente. Plantear el problema de contorno de las vibraciones longitudinales de la barra.

Solución 2. Sea A el área de la sección transversal de la barra. Sea y la posición de un punto en el eje de la barra, siendo $y = 0$ el extremo de la barra que está fijado al techo. Sea $u(y,t)$ el desplazamiento longitudinal de la barra de cada punto y y en cada instante t, λ la densidad lineal y E el módulo de elasticidad de la barra (λ y E se suponen constantes). Si consideramos un segmento de longitud Δy y planteamos el balance de las fuerzas que actúan en ese segmento resulta:

$$\lambda\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\,A\,\frac{\partial u(y+\Delta y,t)}{\partial y} - E\,A\,\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} + \lambda\Delta y\,g$$

siendo g la aceleración de la gravedad. Dividiendo por Δy y llevando al límite este incremento cuando tiende a 0 se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E\,A}{\lambda}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\partial u(y+\Delta y,t)}{\partial y} - \dfrac{\partial u(y,t)}{\partial y}}{\Delta y} + g$$

es decir,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E\,A}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g, \quad 0 < y < L, \quad t > 0}$$

El planteamiento del problema se completa especificando las condiciones iniciales:

$$u(y,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(y,0)}{\partial t} = v_1; \qquad 0 \le y \le L$$

y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) \ \text{ acotado}; \qquad t \geq 0$$

En el extremo $y = L$ también podría imponerse la condición de contorno $\dfrac{\partial u(L,t)}{\partial y} = 0$ (o condición de "extremo libre").

3.– Deducir la ecuación que gobierna el desplazamiento u de una cuerda a la que se aplica una fuerza —perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda— por unidad de longitud proporcional al alejamiento en cada punto de la posición de equilibrio. El coeficiente de proporcionalidad $\alpha(x)$ y la densidad $\lambda(x)$ no son constantes.

Solución 3. Sean $\lambda(x)$ la densidad lineal de la cuerda, $T(x,t)$ la tensión de la cuerda en cada punto x e instante t y $u(x,t)$ el desplazamiento en el plano vertical de un punto x en un instante t. La fuerza exterior por unidad de longitud $w(x,t)$ aplicada perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda y proporcional al alejamiento respecto a dicha posición de equilibrio se puede expresar como

$$w(x,t) = \alpha(x)(u(x,t) - u_E(x,t))$$

siendo $\alpha(x)$ el factor de proporcionalidad y $u_E(x,t)$ la posición de equilibrio de la cuerda (usualmente $u_E(x,t) = 0$).

Si consideramos un segmento de cuerda de longitud Δx y planteamos el balance de las fuerzas que actúan en ese segmento resulta:

$$\lambda(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) - w(x,t)\Delta x - \lambda(x)\Delta x \ g$$

siendo g la aceleración de la gravedad y $\theta(x,t)$ el ángulo que forma con la horizontal la tangente en cada punto x de la cuerda en cada instante t. En la hipótesis de que el movimiento tiene lugar en pequeñas vibraciones y que la cuerda es perfectamente elástica, entonces se cumple

$$\sin\theta(x,t) \approx \tan\theta(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

y dividiendo por Δx y llevando al límite este incremento cuando tiende a 0 se obtiene

$$\lambda(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{T(x+\Delta x,t)\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T(x,t)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} - w(x,t) - \lambda(x)\ g$$

es decir

$$\lambda(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - w(x,t) - \lambda(x)\ g$$

Si asuminos que la tensión de la cuerda $T(x,t)$ es siempre la misma durante todo el movimiento vibratorio e igual a la tensión inicial de tensado de la cuerda T_0 y que la fuerza exterior aplicada es $w(x,t) = \alpha(x)u(x,t)$, la ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna la vibración de la cuerda es

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\ u - \lambda\ g$$

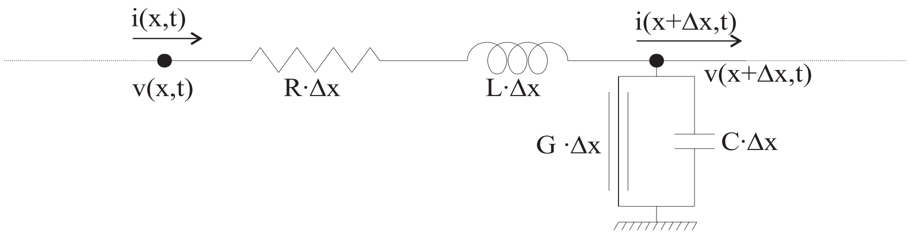
o lo que es lo mismo

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\lambda}\, u - g}$$

siendo $c = \sqrt{T_0/\lambda}$ la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

4.– Una línea de transmisión está formada por un cable de gran longitud por el que fluye corriente eléctrica. El cable presenta una resistencia eléctrica *por unidad de longitud* R y una inductancia *por unidad de longitud* L. Por otra parte, y dado que el cable no está aislado perfectamente, existe una conductancia a tierra *por unidad de longitud* G y una capacitancia a tierra *por unidad de longitud* C (en paralelo con G), como se muestra en la figura adjunta.

Sabiendo que en una bobina la variación de potencial $v(x,t)$ es proporcional a la variación de la intensidad $i(x,t)$ por unidad de tiempo (el factor de proporcionalidad es la inductancia), y que en un condensador la variación de intensidad $i(x,t)$ es proporcional a la variación del potencial $v(x,t)$ por unidad de tiempo (el factor de proporcionalidad es la capacidad), obtener las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que permiten obtener el potencial v y la intensidad i en cada punto x del cable y en cada instante de tiempo t (las denominadas “ecuaciones del telégrafo”).



Solución 4. En el segmento de cable de longitud Δx la resistencia es $R\Delta x$, la inductancia es $L\Delta x$, la capacitancia es $C\Delta x$ y la conductancia a tierra $G\Delta x$. El balance del potencial eléctrico entre el punto x y $x + \Delta x$, esto es por el efecto de la resistencia y de la inductancia, es

$$v(x,t) - v(x+\Delta x, t) = R\Delta x\; i + L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} \tag{4.1}$$

en tanto que el balance de las intensidades en el punto $x + \Delta x$ donde hay una bifurcación del circuito es

$$i(x,t) - i(x+\Delta x, t) = G\Delta x\; v(x+\Delta x, t) + C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4.2}$$

Diviendo en ambas expresiones entre Δx y llevando al límite cuando este incremento tiende a 0, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden conocido como las “ecuaciones del telégrafo”:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R\; i + L \frac{\partial i}{\partial t} \tag{4.3}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G\; v + C \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4.4}$$

Además estas ecuaciones se pueden expresar como una única ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Así, si se deriva la ecuación (4.3) respecto de x, y la ecuación (4.4) respecto de t y se sustituye la derivada cruzada que se obtiene de ésta en la anterior, se obtiene la ecuación en derivadas parciales de segundo orden en términos del potencial v:

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RG\,v + (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}} \tag{4.5}$$

Si se procede al revés, esto es, derivando la ecuación (4.3) respecto de t y sustituyendo la derivada cruzada que se obtiene de ésta en la ecuación (4.4) tras derivarla respecto de x, se obtiene la ecuación en derivadas parciales de segundo orden en términos de la intensidad i:

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RG\,i + (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}} \tag{4.6}$$

En el caso particular, de que el cable presente una pérdida a tierra y una inductancia despreciables ($G = 0$, $L = 0$), las ecuaciones (4.5) y (4.6) se reducen a las ecuaciones parabólicas

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{4.7}$$

Por otra parte, en el caso de transmisión de señales de alta frecuencia, los factores RG, RC y LG son generalmente mucho menores que el factor LC por lo que las ecuaciones (4.5) y (4.6) se aproximan a las ecuaciones hiperbólicas

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{4.8}$$

5.– Una cuerda perfectamente elástica de gran longitud que se encuentra inicialmente en reposo coincidiendo con la dirección del eje positivo de abscisas, se tensa de modo que el extremo $x = 0$ se mantiene fijo en todo instante de tiempo. A lo largo de la cuerda se aplica transversalmente una fuerza concentrada de magnitud K que se desplaza con velocidad constante v, partiendo del origen de coordenadas. La cuerda tiene una masa por unidad de longitud igual a λ y la tensión inicial de la cuerda es constante (τ_0).

En estas condiciones, se pide obtener la ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento vertical $y = u(x,t)$ de cada punto x de la cuerda en cada instante de tiempo t, si se consideran despreciables los efectos gravitatorios en la vibración de la cuerda. (Nota: Téngase en cuenta que una carga concentrada en un punto P se corresponde con la aplicación de una carga por unidad de longitud infinita en P y nula en los demás puntos.)

Solución 5. El análisis de este problema es esencialmente el del "problema de la cuerda vibrante" considerando además el efecto de una fuerza externa por unidad de longitud f_{ext} que se desplaza a una velocidad constante conocida v. Por lo tanto el balance de fuerzas conduce a la ecuación en derivadas parciales

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda\, g - f_{ext}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$

siendo u los desplazamientos de la cuerda en el plano vertical.

La fuerza externa que se desplaza a velocidad v se puede expresar matemáticamente como $f_{ext} = K\delta(t - x/v)$ donde $\delta(\cdot)$ es la delta de Dirac, por lo que la ecuación que gobierna las vibraciones de la cuerda es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau_0}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g - \frac{K}{\lambda}\delta(t - x/v), \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$

y si los efectos gravitatorios se consideran despreciables resulta

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{\lambda}\delta(t - x/v), \quad 0 < x < \infty,\ t > 0}$$

siendo $c = \sqrt{\tau_0/\lambda}$ la velocidad de la propagación de las ondas en la cuerda.

6.– Unas esferas de combustible (de radio R) generan una cantidad de calor constante Q por unidad de volumen y unidad de tiempo. A la vez, su contorno es enfriado por un fluido refrigerante, de modo que el flujo en el contorno es proporcional —según una constante h que mide la transferencia de calor combustible/fluido— a la diferencia entre la temperatura en el contorno y la temperatura del fluido —asumida constante e igual a T_F—.

Si se denomina k a la conductividad térmica del combustible, ρ a su densidad y C_p a su capacidad calorífica, deducir el problema de valores iniciales y de contorno que permite determinar la distribución de la temperatura $T(r,t)$ en una de las esferas en cualquier punto radial r e instante t, si todas las propiedades físicas son constantes. La distribución inicial de temperaturas en la esfera es conocida e igual a T_0 (constante).

Solución 6. La ecuación se deduce del planteamiento del principio de conservación de la energía en el recinto esférico de radio interior r y radio exterior $r + \Delta r$. Así, si tenemos en cuenta que el transporte de calor en el interior de la esfera es exclusivamente por conducción (y consecuentemente no hay convección por lo que $dr/dt = 0$), la variación de la energía total es $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\partial E}{\partial t}$. Por otra parte la energía total es $E(t) = 4\pi r^2 \Delta r\, e(r,t)$ siendo $e(r,t)$ la energía interna por unidad de volumen ($e(r,t) = C_p\rho\, T(r,t)$).

En consecuencia el balance de calor es

$$4\pi r^2 C_p\rho\Delta r\frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi r^2\phi(r,t) - 4\pi(r+\Delta r)^2\phi(r+\Delta r,t) + 4\pi r^2 Q\Delta r$$

siendo $\phi(r,t)$ el flujo de calor, esto es, la cantidad de calor que fluye por unidad de superficie y unidad de tiempo. Si ahora se divide la expresión anterior por $4\pi r^2\Delta r$ y se lleva al límite cuando Δr tiende a 0 se obtiene

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\phi(r,t)\right) + Q, \qquad 0 < r < R,\ t > 0$$

Si introducimos ahora la ecuación constitutiva, esto es, la ley de Fourier $\phi(r,t) = -k(r,t)\dfrac{\partial T}{\partial r}$ resulta la ecuación en derivadas parciales

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, k(r,t)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + Q, \qquad 0 < r < R,\ t > 0$$

que en el caso de que las propiedades físicas sean constantes se reduce a

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{Q}{C_p \rho}, \qquad 0 < r < R,\ t > 0}$$

siendo $\alpha = k/(C_p\rho)$ la difusividad térmica del material.

Con respecto a la condición de contorno en $r = R$ se trata de una condición mixta dada por $\phi(R,t) = h(T(R,t) - T_F)$ que se puede escribir, introduciendo la ley de Fourier, como:

$$\boxed{\frac{\partial T(R,t)}{\partial r} + \frac{h}{k} T(R,t) = \frac{h}{k} T_F, \quad t \geq 0}$$

Por otra parte en el punto $r = 0$ debe establecerse una condición de singularidad dado que la ecuación en derivadas parciales es singular en ese punto. Una condición de singularidad aplicable en este problema consiste en imponer que la temperatura $T(r,t)$ debe estar acotada en $r = 0$.

Finalmente la condición inicial es $T(r,0) = T_0$, $0 \leq r \leq R$.

7.– Una barra de acero de sección circular de radio $r(x)$, densidad constante ρ y módulo de elasticidad transversal $G(x)$ se encuentra sometida a oscilaciones angulares a lo largo de ella. Sabiendo que la sección tiene un momento de inercia a torsión $J(x)$, deducir la ecuación diferencial que rige el movimiento de oscilación angular de la barra, asumiendo que tiene lugar en pequeñas vibraciones.

Nota: Se recuerda que, siendo $\phi(x)$ el giro en una sección transversal debido a las oscilaciones, el momento torsor para una barra de sección circular es $M(x) = J(x)G(x)\phi(x)/r(x)$.

Solución 7. Realicemos un análisis de los momentos que actúan en un segmento de barra de longitud Δx, entre los puntos x y $x + \Delta x$.

El momento de inercia I es la masa $(\rho A(x)\Delta x)$ multiplicado por el cuadrado del radio de giro (que viene dado por $\sqrt{J(x)/A(x)}$) donde $A(x)$ es el área de la sección transversal correspondiente al punto x. Por otra parte, la aceleración angular es $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$, siendo θ el ángulo de giro de la barra durante el movimiento vibratorio a torsión.

Las hipótesis básicas de este modelo son: **a)** el movimiento tiene lugar con pequeñas vibraciones, por lo que la deformación angular es pequeña y se puede aproximar por su tangente: $\phi(x,t) = r(x)\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$, y **b)** las secciones transversales se mantienen siempre paralelas durante todo el movimiento.

En estas condiciones, el equilibrio de momentos es

$$I\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{J(x+\Delta x)G(x+\Delta x)\phi(x+\Delta x,t)}{r(x+\Delta x)} - \frac{J(x)G(x)\phi(x,t)}{r(x)}$$

que sustituyendo el valor del momento de inercia y de la deformación angular resulta

$$J(x)\rho\Delta x\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = J(x+\Delta x)G(x+\Delta x)\frac{\partial\theta(x+\Delta x,t)}{\partial x} - J(x)G(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$$

Si ahora se divide la expresión anterior entre Δx y se lleva al límite cuando tiende a 0, resulta la ecuación en derivadas parciales que gobierna las oscilaciones angulares de la barra

$$\boxed{J(x)\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(J(x)G(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \quad 0 < x < L,\ t > 0}$$

8.– Plantear el problema bidimensional de valores iniciales y de contorno correspondiente a la transmisión de calor en una placa rectangular metálica de dimensiones $L \times H$ m^2 de pequeño espesor que pierde calor por sus superficies superior e inferior según la ley de enfriamiento de Newton.

En los contornos $x = 0$ y $y = H$ se conocen los valores de las temperaturas (T_0 y T_H), el lado $x = L$ está aislado, y en el cuarto lado el flujo de calor es proporcional a la temperatura en cada punto de ese contorno. Inicialmente la distribución de temperaturas es conocida y viene dada por la función $f(x, y)$.

(Nota: Considérense constantes todas las magnitudes físicas características del material.)

Solución 8. Para la deducción de la ecuación diferencial, se considerará el balance de calor en una porción de la placa de tamaño $\Delta x \times \Delta y$, planteando el balance en un punto interior de esta porción $\tilde{x}, \tilde{y}$ ($x < \tilde{x} < x + \Delta x$ y $y < \tilde{y} < y + \Delta y$).

Así, en ausencia de fenómenos convectivos, la variación de la energía total es

$$\frac{dE}{dt} = \delta\Delta x\Delta y\frac{\partial e}{\partial t}$$

siendo δ el espesor de la placa y e la energía interna por unidad de volumen.

El principio de conservación de la energía da lugar al siguiente balance:

$$\begin{aligned}\delta\Delta x\Delta y\frac{\partial e}{\partial t} =& \phi_{\mathtt{X}}(x, \tilde{y}, t)\delta\Delta y - \phi_{\mathtt{X}}(x + \Delta x, \tilde{y}, t)\delta\Delta y \\ &+ \phi_{\mathtt{Y}}(\tilde{x}, y, t)\delta\Delta x - \phi_{\mathtt{Y}}(\tilde{x}, y + \Delta y, t)\delta\Delta x - 2h\Delta x\Delta y(u(\tilde{x}, \tilde{y}, t) - T_E)\end{aligned}$$

siendo $\phi_{\mathtt{X}}$ el flujo de calor en la dirección $\mathtt{X}$, $\phi_{\mathtt{Y}}$ el flujo de calor en la dirección $\mathtt{Y}$, T_E la temperatura exterior ambiente (conocida) y $u(x, y, t)$ la temperatura en un punto de la placa en el instante t.

Si se divide la identidad anterior entre $\Delta x\Delta y$, se lleva al límite cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, y se tiene en cuenta que $x < \tilde{x} < x + \Delta x$ y $y < \tilde{y} < y + \Delta y$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\delta\frac{\partial e}{\partial t} = -\delta\frac{\partial\phi_{\mathtt{X}}(x, y, t)}{\partial x} - \delta\frac{\partial\phi_{\mathtt{Y}}(x, y, t)}{\partial y} - 2h(u(x, y, t) - T_E), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < H,\ t > 0$$

Introduciendo las ecuaciones constitutivas $\phi_{\mathtt{X}} = -k_{\mathtt{X}}\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\phi_{\mathtt{Y}} = -k_{\mathtt{Y}}\frac{\partial u}{\partial y}$ —siendo $k_{\mathtt{X}}$ y $k_{\mathtt{Y}}$ las conductividades térmicas en las dos direcciones que se asumirán constantes—, y la relación existente entre la energía interna e y la temperatura ($e = c\rho u$, donde c es el calor específico y ρ la densidad) se obtiene

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k_{\mathsf{X}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{\mathsf{Y}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2h}{\delta}(u - T_E), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < H,\ t > 0$$

Finalmente, si el material es isótropo ($k = k_{\mathsf{X}} = k_{\mathsf{Y}}$), resulta la ecuación en derivadas parciales

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u - \frac{2h}{\delta}(u - T_E), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < H,\ t > 0$$

Por otra parte las condiciones de contorno son

$$\begin{array}{rrr} u(0, y, t) = T_0; & \dfrac{\partial u(L, y, t)}{\partial x} = 0; & 0 \le y \le H,\ t \ge 0 \\ -k_{\mathsf{Y}}\dfrac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = \beta\ u(x, 0, t); & u(x, H, t) = T_H; & 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \end{array}$$

siendo β un factor de proporcionalidad.

La condición inicial es $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $0 \le x \le L$, $0 \le y \le H$.

9.– Como es sabido, cuando varía la temperatura de un cuerpo éste puede cambiar su estado físico. Y así por ejemplo, al descender la temperatura por debajo del punto de fusión tiene lugar el paso de fase líquida a sólida, comprobándose experimentalmente que en la superficie de cambio de fase la temperatura se mantiene constante en todo momento (e igual a la temperatura de solidificación). Si la temperatura continúa descendiendo, la superfice de cambio de fase se desplaza dentro de la masa de líquido a medida que el proceso de solidificación va progresando. En este proceso de movimiento de la superficie de cambio de fase y solidificación de una determinada masa de líquido se produce un desprendimiento de calor latente.

Estudiemos seguidamente el proceso de congelación del agua en un lago muy profundo. Consideraremos que nuestro estudio tiene lugar en una fría noche de invierno, sin viento ni corrientes de modo que podemos considerar que la superficie del lago es plana y que el proceso de solidificación tiene lugar de tal modo que la superficie de cambio de fase se mantiene en todo momento en un plano paralelo a la superficie del lago. En estas condiciones, podemos plantear un modelo que solamente dependa de la profundidad y y del tiempo t. El origen $y = 0$ se toma en la superficie del lago y $y > 0$ a medida que aumenta la profundidad.

Para no complicar el modelo supondremos que inicialmente toda la masa de agua del lago tiene una misma temperatura T_D, mayor que la temperatura de congelación del agua (0°C), y que para $t > 0$ la temperatura en la superficie del lago ($y = 0$) se mantiene todo el tiempo a una temperatura constante T_N por debajo de los 0°C. En estas condiciones, se producirá una progresiva solidificación de la masa de agua del lago que modo que la frontera de congelación, es decir la superficie de cambio de fase, se irá desplazando a lo largo del tiempo según una función desconocida $\xi(t)$ dentro de la masa de agua que se congela.

Plantear el problema de valores iniciales y de contorno que permite obtener la temperatura en la masa de agua ($u_a(y, t)$), la temperatura en la masa de hielo ($u_h(y, t)$) —considerando el cambio de fase—, y la evolución de la frontera de congelación ($\xi(t)$).

Los calores específicos (c_a, c_h), densidades (ρ_a, ρ_h) y coeficientes de conductividad térmica (k_a, k_h) del agua y del hielo así como también el calor latente de fusión del agua dulce (λ J/kg) son conocidos y se considerarán constantes en este estudio.

Solución 9. Sean $u_a(y,t)$ la temperatura en la masa de agua y $u_h(y,t)$ la temperatura en la masa de hielo. En ambos medios, la distribución de temperaturas se obtiene de plantear el principio de conservación de la energía (no hay fuentes de calor en este caso) de modo análogo al problema de transmisión de calor por conducción en una barra metálica, es decir:

$$\text{En el Hielo:}\ \ c_h\rho_h\frac{\partial u_h}{\partial t}=k_h\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2},\quad 0<y<\xi(t);\ t>0$$
$$\text{En el Agua:}\ \ c_a\rho_a\frac{\partial u_a}{\partial t}=k_a\frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2},\quad \xi(t)<y<\infty;\ t>0$$

Obsérvese que el dominio de solución del problema es semi-infinito ($0<y<\infty$), y que cada una de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se satisface en un dominio variable con el tiempo a través de la función $\xi(t)$ (incógnita) correspondiente a la posición a lo largo del tiempo de la superficie de cambio de fase entre la masa de hielo y la de agua.

Asimismo conocemos las condiciones térmicas iniciales y en la superficie del lago

$$u_h(0,t)=T_N,\quad t\geq 0;\qquad u_a(y,0)=T_D,\quad \xi(0)<y<\infty$$

A continuación planteamos las condiciones que tienen lugar durante el cambio de fase y en el desplazamiento de la superficie de congelación existente entre las masas de hielo y agua: En dicha superficie la temperatura es constante (e igual a la temperatura de congelación del agua), por lo que en el punto $y=\xi(t)$, $\forall t$, se cumple que

$$u_h(y,t)\Big|_{y=\xi(t)}=0,\quad \forall t;\qquad u_a(y,t)\Big|_{y=\xi(t)}=0,\quad \forall t$$

Por otra parte si se analiza la evolución de la superficie de congelación entre dos instantes de tiempo t y $t+\Delta t$, ésta se desplaza desde una posición y_1 (en el instante t) a otra $y_2=y_1+\Delta\xi$ (en el instante $t+\Delta t$). En este proceso se produce la solidificación de la masa de agua por unidad de superficie $\rho_a\Delta\xi$ desprendiéndose una cantidad de calor latente por unidad de superficie igual a $\lambda\rho_a\Delta\xi$. Así, los flujos de calor que tienen lugar durante el tiempo Δt vienen dados por

$$\Delta t\left(\phi_a\Big|_{y_2}-\phi_h\Big|_{y_1}\right)=\lambda\rho_a\Delta\xi$$

siendo ϕ_a el flujo de calor en la masa de agua y ϕ_h el flujo de calor en la masa de hielo, que expresados en términos de la ley de Fourier resultan

$$k_h\frac{\partial u_h}{\partial y}\Big|_{y_1}-k_a\frac{\partial u_a}{\partial y}\Big|_{y_1+\Delta\xi}=\lambda\rho_a\frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

Si llevamos al límite esta expresión cuando $\Delta t\to 0$ obtendremos

$$k_h\frac{\partial u_h}{\partial y}\Big|_{y=\xi(t)}-k_a\frac{\partial u_a}{\partial y}\Big|_{y=\xi(t)}=\lambda\rho_a\frac{d\xi}{dt};\ t>0$$

Resumiendo el planteamiento completo de este problema —conocido como "problema de Stephan"— consiste en obtener las temperaturas u_a y u_h, y la evolución de la superficie de congelación $\xi(t)$ que satisfacen las ecuaciones y condiciones:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_h}{\partial t} = \frac{k_h}{c_h \rho_h} \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \xi;\ t > 0\\
&\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{k_a}{c_a \rho_a} \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2}, \quad \xi < y < \infty;\ t > 0\\
&u_h(0,t) = T_N, \quad t \geq 0\\
&u_a(y,0) = T_D, \quad \xi < y < \infty\\
&u_h(\xi,t) = 0, \quad t \geq 0\\
&u_a(\xi,t) = 0, \quad t \geq 0\\
&k_h \frac{\partial u_h}{\partial y}\Big|_{y=\xi} - k_a \frac{\partial u_a}{\partial y}\Big|_{y=\xi} = \lambda \rho_a \frac{d\xi}{dt};\ t > 0
\end{aligned}
$$