CÁLCULO AVANZADO EN INGENIERÍA — PRÁCTICA 1

Introducción (Curso 2023–2024)

1.– Demostrar que la solución general de la ecuación $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ viene dada por

$$u(x,y)=f(\beta x-\alpha y)$$

siendo α y β constantes reales y f una función arbitraria.

Solución 1. Denominemos $z=\beta x-\alpha y$, entonces la solución es $u(x,y)=f(z)|_{z=\beta x-\alpha y}$.

Si obtenemos sus correspondientes derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\beta\frac{df}{dz},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=-\alpha\frac{df}{dz},$$

comprobamos que evidentemente satisfacen la ecuación en derivadas parciales $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

2.– Verificar que las distintas funciones

$$u(x,y)=x^2-y^2,\qquad u(x,y)=e^x\sin y,\qquad u(x,y)=\ln[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2],\quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones ($\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$).

Solución 2. Para ello es suficiente con calcular las derivadas parciales y comprobar que se verifica la ecuación de Laplace. Así, en cada caso, se tiene

$$u=x^2-y^2\longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

$$u=e^x\sin y\longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\sin y$$

$$\begin{aligned} u=\ln z|_{z=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\longrightarrow\quad &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2(x-\alpha)}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(y-\beta)}{z},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-4(x-\alpha)^2}{z^2}+\frac{2}{z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-4(y-\beta)^2}{z^2}+\frac{2}{z}\end{aligned}$$

3.– Demostrar que la función $u(x,t)=\sin x\cos(\alpha t)+\dfrac{1}{\alpha}\cos x\sin(\alpha t)$ es una solución del problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad (0<x<\pi,\ t>0)\\ u(0,t)+u(\pi,t)=0,\qquad (t>0)\\ u(x,0)=\sin x,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos x,\qquad (0\le x\le\pi)\end{gathered}$$

Solución 3. Para que la función u sea solución del problema de valores iniciales y de contorno deben verificarse la ecuación en derivadas parciales y las condiciones iniciales y de contorno. Así,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x\cos(\alpha t) - \frac{1}{\alpha}\cos x\sin(\alpha t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha^2 \sin x\cos(\alpha t) - \alpha\cos x\sin(\alpha t)$$

verifican la ecuación de ondas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

La condición de contorno $u(0,t) + u(\pi,t) = 0$ se satisface dado que

$$u(0,t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}, \quad u(\pi,t) = -\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}$$

y se puede comprobar que la función $u = \sin x\cos(\alpha t) + \frac{1}{\alpha}\cos x\sin(\alpha t)$ satisface las condiciones iniciales sin más que evaluar para $t = 0$ en la función u y en su derivada temporal $\frac{\partial u}{\partial t}$.

4.– Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ es de la forma $u(x,y) = f(x/y)$, siendo f una función arbitraria. Asimismo, hallar una solución particular que verifique las condiciones

$$u(1,1) = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,1/x) = \frac{1}{x}$$

Solución 4. Denominemos $z = x/y$, entonces la solución es $u(x,y) = f(z)|_{z=x/y}$.

Si obtenemos sus correspondientes derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}\frac{df}{dz},$$

comprobamos que evidentemente satisfacen la ecuación en derivadas parciales $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Para obtener una solución particular es preciso hallar la función f que satisface además las condiciones $u(1,1) = 2$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(x,1/x) = \frac{1}{x}$.

En el caso de esta última condición, dado que la derivada parcial respecto de x es $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{df}{dz}$ siendo $z = x/y$, al evaluar para $y = 1/x$ se obtiene

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=1/x} = x\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=x^2}$$

por lo que la condición $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,1/x) = \dfrac{1}{x}$ equivale a resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$x\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=x^2} = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{df}{dz} = \frac{1}{z}$$

cuya solución general es $f(z) = \ln(z) + K$.

La constante K se puede obtener sin más que imponer que se verifique la condición $u(1,1) = 2$. Es decir, ya que $x = 1$, $y = 1$, entonces $z = x/y = 1$ y se debe cumplir $\ln(1) + K = 2$ por lo que $K = 2$.

En conclusión la solución particular es $\boxed{u(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2}$

5.– Obtener la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Solución 5. La ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

y efectuando el cambio de función $v(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, resulta la ecuación diferencial $\dfrac{\partial v}{\partial y} + v = 0$ cuya solución es

$$v(x,y) = e^{-y} f(x)$$

siendo f una función arbitraria de la variable x. Sustituyendo a continuación $v = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, resulta una nueva ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} f(x)$$

cuya integración es también inmediata:

$$u(x,y) = e^{-y} \int f(x)dx + G(y)$$

siendo $G(y)$ una función arbitraria de la variable y.

Si finalmente denominamos F a la primitiva de f, esto es $F(x) = \int f(x)dx$, obtenemos la solución general de la ecuación en derivadas parciales:

$$\boxed{u(x,y) = e^{-y} F(x) + G(y)}$$

donde $F(x)$ y $G(y)$ son funciones arbitrarias.

6.– Obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial xy} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ **b)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Solución 6. a) La ecuación en derivadas parciales se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial xy}\right) = 0$$
$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

y efectuando el cambio de función $v(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$, resulta la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Esta ecuación se puede resolver haciendo un doble cambio de variables de la forma:

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy$$

donde los valores de a, b, c, d se elegirán de modo que resulte una nueva ecuación diferencial más sencilla.

Aplicando la regla de cadena, las derivadas parciales en términos de las nuevas variables ξ, η son:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial v}{\partial \xi} + c\frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial v}{\partial \xi} + d\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

que al sustituirlas en la ecuación en derivas parciales queda

$$(a-3b)\frac{\partial v}{\partial \xi} + (c-3d)\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

La elección de valores $a = 3$, $b = 1$, y $c - 3d \neq 0$ conduce a la ecuación $(c-3d)\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ cuya solución es $v(\xi, \eta) = f(\xi)$ siendo f una función arbitraria de la variable ξ.

En consecuencia, deshaciendo los cambios de variable, se obtiene la solución general de la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ que viene dada por $v(x, y) = f(3x + y)$.

Si tenemos en cuenta que previamente hemos denominado $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, sustituyendo el valor de la función v se obtiene la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(3x + y)$$

que se puede resolver mediante un nuevo cambio de variables de la misma forma que antes $\xi = ax + by$, $\eta = cx + dy$ obteniéndose tras aplicar la regla de la cadena la ecuación diferencial

$$(a-b)\frac{\partial u}{\partial \xi} + (c-d)\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(3x + y)$$

Dada que la función f depende de $(3x+y)$ parece obvio la elección $a = 3$, $b = 1$ lo que conduce a $2\frac{\partial u}{\partial \xi} + (c-d)\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi)$ y seguidamente la elección $c = d = 1$, resultando la ecuación diferencial $2\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$ cuya solución es $u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int f(\xi)d\xi + G(\eta)$ siendo G una función arbitraria de la variable η.

Finalmente, si se denomina $F(\xi) = \frac{1}{2}\int f(\xi)d\xi$, se obtiene la solución general en el dominio ξ, η: $u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ siendo $\xi = 3x + y$ y $\eta = x + y$ por lo que la solución general en el dominio x, y es

$$\boxed{u(x, y) = F(3x + y) + G(x + y)}$$

Solución 6. b) La ecuación en derivadas parciales se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial xy} - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \longrightarrow & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

y efectuando el cambio de función $v(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$, resulta la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Procediendo de modo análogo al del apartado **a)**, esta ecuación se puede resolver haciendo un doble cambio de variables de modo que la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial v}{\partial x} - 2\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ es $v(x,y) = f(2x+y)$ siendo f una función arbitraria.

Sustituyendo este resultado en la identidad $v(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$, se obtiene la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(2x+y)$$

que de nuevo se puede resolver mediante cambio de variables (ver apartado **a)**).

La solución general es $\boxed{u(x,y) = F(2x+y) + G(x-y)}$, siendo F y G funciones arbitrarias.

7.– Verificar que la solución del problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \frac{\sin(nx)}{n},$$

es la función

$$u(x,y) = \frac{\operatorname{Sh}(ny)\sin(nx)}{n^2}.$$

¿Este problema está bien planteado en el sentido de Hadamard? ¿Por qué?

Solución 7.a) Para verificar que la función $u(x,y) = \dfrac{\operatorname{Sh}(ny)\sin(nx)}{n^2}$ es solución del problema de Cauchy planteado es suficiente con calcular las derivadas parciales correspondientes y comprobar que se satisfacen la ecuación en derivadas parciales y las condiciones iniciales. Así, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\operatorname{Sh}(ny)\cos(nx)}{n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\operatorname{Ch}(ny)\sin(nx)}{n}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\operatorname{Sh}(ny)\sin(nx), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{Sh}(ny)\sin(nx)$$

Evidentemente se satisface la ecuación de Laplace, y se verifica también que cuando $y = 0$, $u(x,0) = 0$ y $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, dado que $\operatorname{Sh}(0) = 0$ y $\operatorname{Ch}(0) = 1$.

Solución 7.b) El problema no está bien planteado. Dado que hemos verificado que al menos hay una función que verifica la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, podemos afirmar que existe solución. La unicidad en principio no se puede garantizar, pero como veremos seguidamente el problema no es estable, por lo que no se cumplen las condiciones de Hadamard de planteamiento correcto de un problema.

Así, para valores elevados de n, que es uno de los datos, la condición inicial $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \dfrac{\sin(nx)}{n} \approx 0$ dado que $|\sin(nx)| \leq 1$ por lo que el problema a resolver tiende al siguiente problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0$$

cuya solución es $u(x,y)=0$.

Sin embargo, para valores elevados de n, la solución analítica $u(x,y)=\dfrac{\mathrm{Sh}(ny)\sin(nx)}{n^2}$ tiende a ∞, de modo que pequeñas variaciones en el valor de n producen resultados muy distintos. La solución por tanto es inestable.

8.– La siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales cuasi-lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \varepsilon>0 \tag{8.1}$$

se denomina "ecuación de difusión de Burgers" y fue propuesta en 1948 como parte de un modelo matemático de turbulencia. Se trata de una ecuación de evolución que permite estudiar fenómenos tan distintos como los efectos viscosos y no lineales en un fluido en movimiento, o el flujo de vehículos en modelos de tráfico. La ecuación (8.1) se puede transformar en una ecuación diferencial de difusión lineal mediante la conocida como transformación de Cole-Hopf que consiste en el cambio de función $u=-2\varepsilon\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

a) Realizar la transformación de Cole-Hopf de la ecuación de Burgers, y demostrar que la ecuación diferencial que resulta tras efectuar el cambio se satisface si la función $v(x,t)$ verifica la ecuación de difusión

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0. \tag{8.2}$$

b) Se desea resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \varepsilon>0,\quad -\infty<x<\infty;\quad u(x,0)=f(x). \tag{8.3}$$

b.1) Asumiendo que $f(x)$ es una función integrable, determinar con la transformación de Cole-Hopf la condición inicial $v(x,0)$ necesaria para resolver la ecuación lineal (8.2).

b.2) Verificar que la función

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{+\infty}v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}}\,ds \tag{8.4}$$

es solución de la ecuación (8.2), siendo $v(x,0)$ la condición inicial del apartado anterior.

b.3) Obtener la solución $u(x,t)$ al problema de Burgers planteado en (8.3).

Solución 8. a) Para realizar la transformación de Cole-Hopf hay que calcular las derivadas parciales respecto de x,t en términos de la nueva función incógnita v. Es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-2\varepsilon\left(\frac{-1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial xt}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\varepsilon\left(\frac{-1}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2\varepsilon\left(\frac{2}{v^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3-\frac{3}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{v}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)$$

y a continuación sustituir en la ecuación en derivadas parciales, resultando:

$$\frac{2\varepsilon}{v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{2\varepsilon}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial xt}-\frac{2\varepsilon^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{2\varepsilon^2}{v}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0\longrightarrow\frac{2\varepsilon}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{2\varepsilon}{v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial xt}-\varepsilon\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)=0$$

$$\longrightarrow\frac{2\varepsilon}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{2\varepsilon}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0$$

Y esta última identidad se verifica siempre que la función $v(x,t)$ satisfaga la ecuación en derivadas parciales de segundo orden lineal

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Solución 8. b.1) Dada la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, sustituyendo en la transformación de Cole-Hopf para $t = 0$ resulta la ecuación

$$-2\varepsilon \frac{1}{v(x,0)} \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = f(x)$$

Como se observa, se trata de una ecuación diferencial ordinaria cuya solución $v(x,0)$ constituirá la condición inicial para resolver la ecuación de difusión (8.1). Integrando esta EDO, se obtiene como solución general:

$$v(x,0) = Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int f(x)dx}$$

Solución 8. b.2) Para verificar que la función $v(x,t)$ dada es solución hay que calcular en primer lugar las derivadas parciales y seguidamente sustituir en la ecuación de difusión (8.2). Así tendremos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-1}{2t\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds + \frac{1}{4\varepsilon t^2\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-s)^2\, v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{2\varepsilon t\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-s)v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-1}{2\varepsilon t\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds + \frac{1}{4\varepsilon^2 t^2\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-s)^2\, v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds$$

que puede comprobarse que verifican $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$.

Solución 8. b.3) La solución $u(x,t)$ al problema de Burgers se puede obtener sustituyendo en la transformación de Cole-Hopf $u = -2\varepsilon \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$ la función $v(x,t)$ dada por la ecuación (8.4) e incorporar asímismo la condición inicial $v(x,0)$ del apartado **b.1)**. Así se obtiene:

$$u(x,t) = \frac{1}{t} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-s)\, v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t}} ds} = \frac{1}{t}\left(x - \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\, e^{-\left[\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon}\int f(s)ds\right]} ds}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon}\int f(s)ds\right]} ds} \right)$$
