PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE
Y SERIES GENERALIZADAS DE FUNCIONES

La resolución por separación de variables de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conduce con frecuencia a un problema de contorno en términos de una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas soluciones son de gran importancia para obtener la solución de la ecuación en derivadas parciales. Seguidamente se resumen los teoremas más importantes relacionados con un tipo muy importante de problema de contorno: los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. En un anexo aparte se han incluido algunas definiciones y teoremas importantes relacionados con las funciones ortogonales y conjuntos de funciones ortogonales que tienen relación con esta clase de problemas.

Se denomina **"problema de Sturm-Liouville"** al problema de contorno definido por la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con sus correspondientes condiciones de contorno también lineales y homogéneas, de la forma general:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) + q(x)y(x) + \lambda\, p(x)y(x) = 0, \quad a < x < b; \tag{1a}$$

$$k_1 y(a) + k_2\frac{dy(a)}{dx} = 0, \qquad l_1 y(b) + l_2\frac{dy(b)}{dx} = 0; \tag{1b}$$

siendo $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Las constantes k_1 y k_2 no pueden ser ambas nulas, ni tampoco ser nulas a la vez l_1 y l_2.

Cuando los límites del dominio a y b son finitos, las funciones $r(x)$, $r'(x)$, $q(x)$ y $p(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ en $[a, b]$ se dice que el problema de Sturm-Liouville es **"regular"**. Si alguna de estas condiciones no se satisface se dice que el problema de Sturm-Liouville es **"no-regular"**. Entre los problemas no-regulares hay dos tipos especialmente importantes que se tratarán específicamente y que son los problemas de Sturm-Liouville **"periódicos"**, caracterizados por condiciones de contorno periódicas, y los problemas de Sturm-Liouville **"singulares"**, en los que la función $r(x)$ —e incluso $p(x)$— se anula en uno o en ambos de los extremos del intervalo, por lo que $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ en $(a, b]$, $[a, b)$, o en (a, b) (dependiendo del caso).

Con carácter general, un problema de contorno puede no tener solución, tener una única solución o admitir múltiples soluciones. En el caso de los problemas de Sturm-Liouville, bien sean regulares o no-regulares, el interés se centra en estudiar y obtener sus soluciones no triviales. Así para un problema de la forma (1), conocidos a, b, k_1, k_2, l_1, l_2, $r(x)$, $q(x)$ y $p(x)$, el parámetro λ no está *a priori* establecido, de modo que aquellos valores de λ que permiten la existencia de soluciones no triviales a (1) se denominan **"valores propios"** del problema de Sturm-Liouville, y las correspondientes funciones no triviales se denominan **"funciones propias"** de (1). Por este motivo, a los problemas de Sturm-Liouville de la forma (1) se les llama también **"problemas de valores propios"**. En lo sucesivo se denominará λ_k a un valor propio cualquiera del espectro de autovalores de (1), y $\phi_k(x)$ a su correspondiente función propia.

1. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE REGULARES

En el caso de los problemas de Sturm-Liouville regulares, se cumplen los siguientes teoremas:

- **Ortogonalidad de las funciones propias.** Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales respecto de la función $p(x)$. Esto es,

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle \equiv \int_a^b p(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = 0 \qquad \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j \tag{2}$$

- **Carácter real de los autovalores.** Todos los valores propios son reales.

- **Espectro de autovalores.** Existe un número infinito de valores propios distintos que pueden ser ordenados en la forma $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ....$ El menor de ellos es λ_1 y no existe cota superior del espectro de autovalores dado que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

- **Unicidad de las funciones propias.** Para cada valor propio λ_k existe una única función propia $\phi_k(x)$ linealmente independiente. Además una función propia $\phi_k(x)$ tiene exactamente $k-1$ raíces en (a, b).

- **Convergencia de las series generalizadas de funciones propias.** Cualquier función continua a trozos $f(x)$ definida en $[a, b]$ se puede representar como una serie generalizada de funciones propias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x) \qquad \text{siendo } \alpha_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}. \tag{3}$$

  La serie generalizada es convergente a $f(x)$ si f es una función continua en x, y converge a $(f(x_+) + f(x_-))/2$ si f es una función continua a trozos en x, para todo punto $x \in (a, b)$.

- **Cociente de Rayleigh.** Todo valor propio λ_k y su correspodiente función propia $\phi_k(x)$ están relacionadas por el cociente de Rayleigh:

$$\lambda_k = \frac{\left.\left[-r(x)\phi_k(x)\dfrac{d\phi_k(x)}{dx}\right]\right|_a^b + \displaystyle\int_a^b \left[r(x)\left(\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right)^2 - q(x)\left(\phi_k(x)\right)^2\right]dx}{\displaystyle\int_a^b p(x)\left(\phi_k(x)\right)^2 dx} \tag{4}$$

- **Valores propios no negativos.** Si $\left.\left[r(x)\phi_k(x)\dfrac{d\phi_k(x)}{dx}\right]\right|_a^b \leq 0$ y la función $q(x) \leq 0$ en $[a, b]$, entonces $\lambda_k \geq 0$.

- **Conjunto completo.** El conjunto de las funciones propias $\{\phi_n\}_{n=1,2,...}$ es un conjunto completo. Esto es, se trata de un conjunto de funciones ortogonales respecto de una función $p(x)$ en el que la igualdad $\langle f, \phi_k \rangle = 0$ se satisface para todas las funciones propias si y solo si $f(x)$ es la función nula en todo punto de (a, b).

2. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE PERIÓDICOS Y SINGULARES

Se denomina problema de Sturm-Liouville **periódico** al problema de contorno formado por la ecuación diferencial (1a) y las condiciones de contorno siguientes

$$\boxed{y(a) = y(b), \qquad \frac{dy(a)}{dx} = \frac{dy(b)}{dx};} \tag{5}$$

que se conocen como "condiciones periódicas" por cuanto establecen igualdad en los valores de la función y sus derivadas en los extremos del dominio (este tipo de condiciones aparecen por ejemplo en problemas en coordenadas polares, esféricas, cilíndricas, etc.).

Por otra parte, diremos que un problema de Sturm-Liouville es **singular** cuando la función $r(x)$ se anula en un extremo del intervalo, o en el otro o en ambos simultáneamente. En consecuencia los tres casos posibles son:

- Si $r(a) = 0$ y $r(b) \neq 0$ (y $r(x) > 0$, $p(x) > 0$ $\forall x \in (a, b]$) las condiciones de contorno son

$$\boxed{y(x) \quad \text{acotada en} \quad x = a, \qquad l_1 y(b) + l_2 \frac{dy(b)}{dx} = 0;} \tag{6}$$

- Si $r(a) \neq 0$ y $r(b) = 0$ (y $r(x) > 0$, $p(x) > 0$ $\forall x \in [a, b)$) las condiciones de contorno son

$$\boxed{k_1 y(a) + k_2 \frac{dy(a)}{dx} = 0, \qquad y(x) \quad \text{acotada en} \quad x = b;} \tag{7}$$

- Si $r(a) = 0$ y $r(b) = 0$ (y $r(x) > 0$, $p(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$) las condiciones de contorno son

$$\boxed{y(x) \quad \text{acotada en} \quad x = a, \qquad y(x) \quad \text{acotada en} \quad x = b;} \tag{8}$$

En las condiciones de contorno anteriores debe entenderse por "función $y(x)$ acotada en un punto" cuando existe el límite de la función en ese punto y es finito.

En los problemas de Sturm-Liouville no-regulares los teoremas enunciados en el apartado anterior pueden no satisfacerse en todos los casos. No obstante, para problemas periódicos y los singulares presentados en (5), (6), (7) y (8) se cumplen los siguientes teoremas

- **Ortogonalidad de las funciones propias.** Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales respecto de la función $p(x)$. Por tanto, $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$, si $\lambda_i \neq \lambda_j$.

- **Carácter real de los autovalores.** Todos los valores propios son reales.
- **Cociente de Rayleigh.** Todo valor propio λ_k y su función propia $\phi_k(x)$ están relacionados por el cociente de Rayleigh, cuya expresión viene dada por (4).
- **Valores propios no negativos.** Si $\left[r(x)\phi_k(x)\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right]\Big|_a^b \leq 0$ y la función $q(x) \leq 0$ en $[a, b]$, entonces $\lambda_k \geq 0$.

Las propiedades antes enumeradas de ordenación del espectro de autovalores o de unicidad de las funciones propias también se verifican en muchos problemas de Sturm-Liouville singulares, aunque no en los problemas periódicos.

Por otra parte, las propiedades de **conjunto completo** y la **convergencia de las series de funciones propias** de los problemas de Sturm-Liouville singulares y periódicos también se satisfacen para funciones $f(x)$ suficientemente bien definidas en el intervalo (a, b). Por tanto, en general, podremos plantear también desarrollos de funciones en series generalizadas de funciones propias obtenidas de problemas de autovalores de Sturm-Liouville periódicos y de problemas singulares con las condiciones de contorno establecidas en (6), (7) y (8).

ANEXO. FUNCIONES ORTOGONALES

- **Producto interno de dos funciones.** Se define el "producto interno respecto de una función de peso $p(x)$" de dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ definidas en un intervalo (a, b), finito o infinito, como:

$$\langle g, h\rangle = \int_a^b p(x)g(x)h(x)dx, \qquad \text{siendo} \;\; p(x) > 0 \;\; \text{en} \;\; (a, b)$$

- **Norma de una función.** Se define la norma de una función g como:

$$||g|| = +\sqrt{\langle g, g\rangle}$$

- **Ortogonalidad de dos funciones respecto de una función de peso.** Dos funciones distintas $g(x)$ y $h(x)$ definidas en un intervalo (a, b), finito o infinito, son ortogonales respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)) si su producto interno es nulo, esto es,

$$\langle g, h\rangle = 0$$

- **Conjunto ortogonal de funciones respecto de una función de peso.** Un conjunto de funciones $g_1(x)$, $g_2(x)$,... definidas en un intervalo (a, b), finito o infinito, es ortogonal respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)) si

$$\langle g_i, g_j\rangle \begin{cases} = 0, & \text{si} \;\; i \neq j; \\ \neq 0, & \text{si} \;\; i = j. \end{cases}$$

- **Conjunto ortonormal de funciones respecto de una función de peso.** Un conjunto de funciones $h_1(x)$, $h_2(x)$,... definidas en un intervalo (a, b), finito o infinito, es ortonormal respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)) si

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker.

- **Serie generalizada de Fourier de una función.** Una función $f(x)$ continua a trozos definida en un intervalo (a, b), finito o infinito, admite desarrollo en serie generalizada de Fourier si dado un conjunto de funciones $g_1(x)$, $g_2(x)$,... definidas en (a, b) y ortogonales respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)), entonces existen los coeficientes α_n tales que la función $f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n(x) \qquad \text{siendo} \;\; \alpha_n = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\langle g_n, g_n \rangle}.$$

Los coeficientes α_n se denominan "constantes de Fourier" de la función f.

- **Desigualdad de Bessel.** Dado un conjunto de funciones definidas en (a, b) ortonormales respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)), la suma de los cuadrados de las constantes de Fourier de un número N de términos del desarrollo en serie generalizada de una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) está acotada, y se cumple que

$$\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n)^2 \leq ||f||^2.$$

- **Función nula.** Una función real $f(x)$ se dice que es una "función nula" en un intervalo (a, b), finito o infinito, si dada una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)) se satisface que

$$\langle f, f \rangle = 0$$

- **Conjunto completo.** Un conjunto de funciones $g_1(x)$, $g_2(x)$,... definidas en (a, b) y ortogonales respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)) constituye un "conjunto completo" si la igualdad

$$\langle f, g_n \rangle = 0$$

se satisface para todo $n = 1, 2, \ldots$ si y solo si $f(x)$ es una función nula en (a, b).

- **Identidad de Parseval.** Dado un conjunto completo de funciones definidas en (a, b) ortonormales respecto de una función de peso $p(x)$ (con $p(x) > 0$ en (a, b)), la suma de los cuadrados de las constantes de Fourier del desarrollo en serie generalizada de una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) es igual al cuadrado de la norma de f, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n)^2 = ||f||^2.$$