TRANSFORMADAS DE FOURIER: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

1. Integral de Fourier de una función

Si una función $f(x)$ es continua a trozos en un intervalo finito (esto es, existe la derivada por la derecha y por la izquierda en cada punto) y es absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, es decir, existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx, \tag{1}$$

entonces la función $f(x)$ admite representación como **Integral de Fourier**:

$$\boxed{f(x) = \int_{0}^{+\infty} \big[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\big]\, d\omega} \tag{2}$$

siendo los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(\omega s)\, ds, \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(\omega s)\, ds \tag{3}$$

En los puntos en los que la función $f(x)$ presenta discontinuidades de salto, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los límites de la función en dichos puntos por la derecha y por la izquierda.

2. Integrales Coseno y Seno de Fourier de una función

En las condiciones establecidas en el apartado anterior para la función $f(x)$, si además la función es par (esto es, $f(-x) = +f(x)$), entonces los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(s)\cos(\omega s)\, ds, \qquad B(\omega) = 0 \tag{4}$$

y la integral de Fourier (2) se reduce a la que se conoce como **Integral Coseno de Fourier**:

$$\boxed{f(x) = \int_{0}^{+\infty} A(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega} \tag{5}$$

En el caso de que la función sea impar (esto es, $f(-x) = -f(x)$), entonces los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = 0, \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(s)\sin(\omega s)\, ds \tag{6}$$

y la integral de Fourier (2) se reduce a la que se conoce como **Integral Seno de Fourier**:

$$\boxed{f(x) = \int_{0}^{+\infty} B(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega} \tag{7}$$

3. Transformadas Coseno de Fourier de una función

Las transformaciones Coseno de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral Coseno de Fourier (5).

Así, sea $f(x)$ una función **PAR** continua a trozos y absolutamente integrable en $(0,+\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}_C[f]$ a la **Transformada Coseno de Fourier** de $f(x)$

$$\boxed{\mathcal{F}_C[f] = F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx} \tag{8}$$

que, como puede observarse, es una nueva función F_C en el dominio ω. Se denomina $\mathcal{F}_C^{-1}[F_C]$ a la **Transformada Inversa Coseno de Fourier** de $F_C(\omega)$

$$\boxed{\mathcal{F}_C^{-1}[F_C] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_C(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega} \tag{9}$$

4. Transformadas Seno de Fourier de una función

Las transformaciones Seno de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral Seno de Fourier (7).

Así, sea $f(x)$ una función **IMPAR** continua a trozos y absolutamente integrable en $(0,+\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}_S[f]$ a la **Transformada Seno de Fourier** de $f(x)$

$$\boxed{\mathcal{F}_S[f] = F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx} \tag{10}$$

que, como puede observarse, es una nueva función F_S en el dominio ω. Se denomina $\mathcal{F}_S^{-1}[F_S]$ a la **Transformada Inversa Seno de Fourier** de $F_S(\omega)$

$$\boxed{\mathcal{F}_S^{-1}[F_S] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_S(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega} \tag{11}$$

5. Propiedad de linealidad de las transformadas Coseno y Seno de Fourier

Las transformaciones Coseno y Seno de Fourier (dadas en (8) y (10)) son lineales, esto es, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifican

$$\mathcal{F}_C[\alpha\, f + \beta\, g] = \alpha\, \mathcal{F}_C[f] + \beta\, \mathcal{F}_C[g]; \qquad \mathcal{F}_S[\alpha\, f + \beta\, g] = \alpha\, \mathcal{F}_S[f] + \beta\, \mathcal{F}_S[g] \tag{12}$$

De forma análoga, las transformaciones Inversas Coseno y Seno de Fourier (dadas en (9) y (11)) son también lineales.

6. Transformadas Coseno y Seno de Fourier de derivadas de funciones

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, tal que $f'(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. En estas condiciones se cumplen las propiedades:

$$\boxed{\mathcal{F}_C[f'] = \omega\mathcal{F}_S[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0); \qquad \mathcal{F}_S[f'] = -\omega\mathcal{F}_C[f]} \tag{13}$$

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, tal que $f'(x)$ sea continua y absolutamente integrable, $f''(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que se satisfagan $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. En estas condiciones se cumplen las propiedades:

$$\boxed{\mathcal{F}_C[f''] = -\omega^2\mathcal{F}_C[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0); \qquad \mathcal{F}_S[f''] = -\omega^2\mathcal{F}_S[f] + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)} \tag{14}$$

7. Integral de Fourier Compleja de una función

Si una función $f(x)$ es continua a trozos en un intervalo finito (esto es, existe la derivada por la derecha y por la izquierda en cada punto) y es absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, es decir, existe la integral (1), entonces la función $f(x)$ admite representación como **Integral de Fourier Compleja**:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{i\omega(x-s)}\,ds\,d\omega} \tag{15}$$

siendo $i = \sqrt{-1}$.

8. Transformadas de Fourier de una función

Las transformaciones de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral de Fourier Compleja (15).

Así, sea $f(x)$ una función continua a trozos y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}[f]$ a la **Transformada de Fourier** de $f(x)$

$$\boxed{\mathcal{F}[f] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx} \tag{16}$$

que, como puede observarse, es una nueva función F en el dominio ω. Se denomina $\mathcal{F}^{-1}[F]$ a la **Transformada Inversa de Fourier** de $F(\omega)$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega x}\, d\omega} \tag{17}$$

9. Propiedad de linealidad de las transformadas de Fourier

La transformación de Fourier definida en (16) es lineal, esto es, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathcal{F}[\alpha\, f + \beta\, g] = \alpha\, \mathcal{F}[f] + \beta\, \mathcal{F}[g] \tag{18}$$

De forma análoga, la transformación Inversa de Fourier (definida en (17)) es también lineal.

10. Transformadas de Fourier de derivadas de funciones

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$, tal que $f'(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En estas condiciones se cumple:

$$\boxed{\mathcal{F}[f'] = i\,\omega \mathcal{F}[f]} \tag{19}$$

Por otra parte, sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$, tal que $f'(x)$ sea continua y absolutamente integrable, $f''(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$. En estas condiciones se cumple:

$$\boxed{\mathcal{F}[f''] = -\omega^2 \mathcal{F}[f]} \tag{20}$$

11. Convolución de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas a trozos, acotadas y absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$. Sea $h(x)$ la **convolución de las funciones** f y g (o también llamado "producto de convolución" de f y g):

$$h(x) = (f \star g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(x-\tau) d\tau \tag{21}$$

Se verifica que la transformada de Fourier de $h(x)$ es el producto de las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$:

$$\mathcal{F}[h] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f]\, \mathcal{F}[g] \;\longrightarrow\; H(\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \tag{22}$$