

TRANSFORMADAS DE FOURIER: DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y EJEMPLOS

1. Integral de Fourier de una función

Si una función $f(x)$ es continua a trozos en un intervalo finito (esto es, existe la derivada por la derecha y por la izquierda en cada punto) y es absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, es decir, existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx, \quad (1)$$

entonces la función $f(x)$ admite representación como **Integral de Fourier**:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)] d\omega \quad (2)$$

siendo los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos(\omega s) ds, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin(\omega s) ds \quad (3)$$

En los puntos en los que la función $f(x)$ presenta discontinuidades de salto, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los límites de la función en dichos puntos por la derecha y por la izquierda.

2. Integrales Coseno y Seno de Fourier de una función

En las condiciones establecidas en el apartado anterior para la función $f(x)$, si además la función es par (esto es, $f(-x) = +f(x)$), entonces los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(s) \cos(\omega s) ds, \quad B(\omega) = 0 \quad (4)$$

y la integral de Fourier (2) se reduce a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad (5)$$

que se denomina **Integral Coseno de Fourier**.

En el caso de que la función sea impar (esto es, $f(-x) = -f(x)$), entonces los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(s) \sin(\omega s) ds \quad (6)$$

y la integral de Fourier (2) se reduce a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega \quad (7)$$

que se denomina **Integral Seno de Fourier**.

3. Transformadas Coseno de Fourier de una función

Las transformaciones Coseno de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral Coseno de Fourier (5).

Así, sea $f(x)$ una función **PAR** continua a trozos y absolutamente integrable en $(0, +\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}_C[f]$ a la **Transformada Coseno de Fourier** de $f(x)$

$$\mathcal{F}_C[f] = F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad (8)$$

que, como puede observarse, es una nueva función F_C en el dominio ω . Se denomina $\mathcal{F}_C^{-1}[F_C]$ a la **Transformada Inversa Coseno de Fourier** de $F_C(\omega)$

$$\mathcal{F}_C^{-1}[F_C] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_C(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad (9)$$

4. Transformadas Seno de Fourier de una función

Las transformaciones Seno de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral Seno de Fourier (7).

Así, sea $f(x)$ una función **IMPAR** continua a trozos y absolutamente integrable en $(0, +\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}_S[f]$ a la **Transformada Seno de Fourier** de $f(x)$

$$\mathcal{F}_S[f] = F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad (10)$$

que, como puede observarse, es una nueva función F_S en el dominio ω . Se denomina $\mathcal{F}_S^{-1}[F_S]$ a la **Transformada Inversa Seno de Fourier** de $F_S(\omega)$

$$\mathcal{F}_S^{-1}[F_S] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_S(\omega) \sin(\omega x) d\omega \quad (11)$$

5. Propiedad de linealidad de las transformadas Coseno y Seno de Fourier

Las transformaciones Coseno y Seno de Fourier (dadas en (8) y (10)) son lineales, esto es, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifican

$$\mathcal{F}_C[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}_C[f] + \beta \mathcal{F}_C[g] \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_S[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}_S[f] + \beta \mathcal{F}_S[g]$$

De forma análoga, las transformaciones Inversas Coseno y Seno de Fourier (dadas en (9) y (11)) son también lineales.

6. Transformadas Coseno y Seno de Fourier de derivadas de funciones

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, tal que $f'(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. En estas condiciones se cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C[f'] &= \omega \mathcal{F}_S[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \\ \mathcal{F}_S[f'] &= -\omega \mathcal{F}_C[f] \end{aligned} \quad (13)$$

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, tal que $f'(x)$ sea continua y absolutamente integrable, $f''(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que se satisfagan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. En estas condiciones se cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C[f''] &= -\omega^2 \mathcal{F}_C[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \\ \mathcal{F}_S[f''] &= -\omega^2 \mathcal{F}_S[f] + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \end{aligned} \quad (14)$$

7. Integral de Fourier Compleja de una función

Si una función $f(x)$ es continua a trozos en un intervalo finito (esto es, existe la derivada por la derecha y por la izquierda en cada punto) y es absolutamente integrable a lo largo del eje de abscisas, es decir, existe la integral (1), entonces la función $f(x)$ admite representación como **Integral de Fourier Compleja**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\omega(x-s)} ds d\omega \quad (15)$$

siendo $i = \sqrt{-1}$.

8. Transformadas de Fourier de una función

Las transformaciones de Fourier directa e inversa se deducen a partir de la Integral de Fourier Compleja (15).

Así, sea $f(x)$ una función continua a trozos y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$. Se denomina $\mathcal{F}[f]$ a la **Transformada de Fourier** de $f(x)$

$$\mathcal{F}[f] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (16)$$

que, como puede observarse, es una nueva función F en el dominio ω . Se denomina $\mathcal{F}^{-1}[F]$ a la **Transformada Inversa de Fourier** de $F(\omega)$

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega x} d\omega \quad (17)$$

9. Propiedad de linealidad de las transformadas de Fourier

La transformación de Fourier definida en (16) es lineal, esto es, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g] \quad (18)$$

De forma análoga, la transformación Inversa de Fourier (definida en (17)) es también lineal.

10. Transformadas de Fourier de derivadas de funciones

Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$, tal que $f'(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. En estas condiciones se cumple:

$$\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f] \quad (19)$$

Por otra parte, sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$, tal que $f'(x)$ sea continua y absolutamente integrable, $f''(x)$ sea continua a trozos y absolutamente integrable, y que satisfaga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$. En estas condiciones se cumple:

$$\mathcal{F}[f''] = -\omega^2\mathcal{F}[f] \quad (20)$$

11. Convolución de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas a trozos, acotadas y absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$. Sea $h(x)$ la **convolución de las funciones** f y g (o también llamado “producto de convolución” de f y g):

$$h(x) = (f \star g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau \quad (21)$$

Se verifica que la transformada de Fourier de $h(x)$ es el producto de las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$:

$$\mathcal{F}[h] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \longrightarrow H(\omega) = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega) \quad (22)$$