TRANSFORMADA DE LAPLACE: DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y EJEMPLOS

1. Definición de Transformada de Laplace

Sea $\mathcal{E}$ el espacio vectorial de las funciones continuas a trozos y de orden exponencial (esto es, dada una función $f(t)$ continua a trozos existen las constantes K y ω tales que $\forall t$ la función f está acotada en la forma $|f(t)| \leq Ke^{\omega t}$).

Se define la Transformada de Laplace $\mathcal{L}[\cdot]$ de la función $f(t) \in \mathcal{E}$ como la transformación integral

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Por ejemplo,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s}; & s > 0 \\ \infty; & s \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1+s^2}; & s > 0 \\ \infty; & s < 0 \\ \nexists; & s = 0 \end{cases}$$

2. Propiedad de linealidad de la transformada de Laplace

La transformación de Laplace es lineal, esto es, dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{E}$ se verifica

$$\mathcal{L}[C_1 f(t) + C_2 g(t)] = C_1 \mathcal{L}[f(t)] + C_2 \mathcal{L}[g(t)], \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3. Propiedad de cambio de escala

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. La función $g(t) = f(\alpha t)$ también pertenece a $\mathcal{E}$ y se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

4. Propiedad de desplazamiento en frecuencia

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. La función $g(t) = e^{\omega t} f(t)$ también pertenece a $\mathcal{E}$ y se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = F(s - \omega)$$

5. Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. La función $g(t) = f(t - \widetilde{T})u(t - \widetilde{T})$ también pertenece a $\mathcal{E}$ y se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = e^{-\widetilde{T}s}F(s)$$

La función escalón $u(t - \widetilde{T})$ viene dada por $u(t - \widetilde{T}) = \begin{cases} 1; & t \geq \widetilde{T} \\ 0; & t < \widetilde{T} \end{cases}$

6. Transformada de Laplace de la derivada primera de una función

Sea $f(t)$ una función continua y de orden exponencial, cuya derivada primera $f'(t)$ sea continua a trozos y de orden exponencial ($f'(t) \in \mathcal{E}$). La transformada de Laplace de la primera derivada de f verifica

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

siendo $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y $f(0)$ el valor de la función en el origen.

7. Transformada de Laplace de la derivada $n-$ésima de una función

Sea $f(t)$ una función continua y de orden exponencial, cuyas derivadas hasta orden $(n-1)$ sean también funciones continuas y orden exponencial y la derivada $n-$ésima sea continua a trozos y de orden exponencial ($f^{(n)}(t) \in \mathcal{E}$). La transformada de Laplace de la derivada $n-$ésima de f verifica

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, y $f(0)$, $f'(0)$,..., $f^{(n-1)}(0)$ son los valores de la función y de sus derivadas hasta orden $(n-1)$ en el origen.

8. Transformada de Laplace de la primitiva de una función

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. Su primitiva $g(t) = \int_0^t f(t)dt$ es una función continua y de orden exponencial, y su transformada de Laplace viene dada por

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = \frac{1}{s}F(s)$$

9. Transformada de Laplace de una función periódica

Sea $p(t)$ una función periódica, de periodo T, continua a trozos y de orden exponencial en $[0, T]$. La transformada de Laplace de esta función periódica es

$$\mathcal{L}[p(t)] = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st}p(t)dt}{1 - e^{-Ts}}$$

10. Transformada de Laplace del producto de una función por el monomio t

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. La función $g(t) = t\, f(t)$ también pertenece a $\mathcal{E}$ y se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = -\frac{d\,F(s)}{ds}$$

11. Transformada de Laplace del producto de una función por el monomio t^n

Sea $f(t) \in \mathcal{E}$. La función $g(t) = t^n\, f(t)$, $n \in \mathbb{N}$, también pertenece a $\mathcal{E}$ y se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = (-1)^n \frac{d^n\,F(s)}{ds^n}$$

12. Convolución de dos funciones

Sean $f(t)$ y $g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{E}$. La función $h(t)$ definida por la convolución de f y g, esto es,

$$h(t) = (f \star g) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

también pertenece a $\mathcal{E}$, y se verifica que la transformada de Laplace de $h(t)$ es el producto de las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$:

$$\mathcal{L}[h(t)] \equiv H(s) = F(s)G(s)$$

Esta propiedad es especialmente útil cuando se emplea en sentido inverso: Así, sean $F(s)$ y $G(s)$ dos funciones en el dominio de las transformadas de Laplace y $H(s)$ su producto ($H(s) = F(s)G(s)$), se verifica que la transformada de Laplace inversa de $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ viene dada por

$$h(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \star \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Por ejemplo, se sabe que la transformada de Laplace de la función $\sin t$ es $\dfrac{1}{1+s^2}$. Si se quiere saber de qué función es transformada de Laplace la función $\dfrac{1}{(1+s^2)^2}$ (es decir, su transformada inversa) se puede aplicar el resultado anterior:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] \star \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] = \sin t \star \sin t$$

y teniendo en cuenta ahora la definición de convolución de dos funciones, calculando la primitiva y evaluando en los límites de integración resulta

$$h(t) = \sin t \star \sin t = \int_0^t \sin(t-\tau)\sin(\tau) d\tau = \frac{\sin t - t\cos t}{2}$$

E1. EJEMPLO 1: Problema de vibraciones forzadas

Considérese el siguiente problema de vibraciones forzadas de un sistema masa-muelle:

$$y'' + \omega_0^2 y = K\sin(\omega t); \qquad y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

siendo $y(t)$ la posición de la masa en cada instante de tiempo t, ω_0 la frecuencia natural del sistema y ω la frecuencia de la carga periódica externa aplicada de magnitud K (carga expresada por unidad de masa). La posición y velocidad iniciales son nulas.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial se obtiene:

$$\mathcal{L}\big[y'' + \omega_0^2 y - K\sin(\omega t)\big] = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}\big[y''\big] + \omega_0^2\mathcal{L}[y] - K\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = 0$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\big[y''\big] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)$, es decir, $\mathcal{L}\big[y''\big] = s^2\mathcal{L}[y]$, la expresión anterior resulta

$$(s^2 + \omega_0^2)\mathcal{L}[y] = K\mathcal{L}[\sin(\omega t)]$$

En consecuencia, la transformada de Laplace de la función que proporciona la posición de la masa $y(t)$ es

$$\mathcal{L}[y] = \frac{K}{s^2 + \omega_0^2}\mathcal{L}[\sin(\omega t)] \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{K\omega}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

La solución final resulta de la transformada inversa de $\dfrac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}$ y que se puede obtener haciendo uso de la propiedad de convolución (apartado **12.**), o bien descomponiendo en fracciones simples esta expresión e identificando en tablas de transformadas los distintos términos. Así,

$$\frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}\right); \qquad \omega \neq \omega_0$$

En consecuencia hay que analizar dos posibles situaciones: si $\omega \neq \omega_0$, y si $\omega = \omega_0$, es decir, cuando la frecuencia externa coincide con la frecuencia natural del sistema (resonancia).

Si $\omega \neq \omega_0$, la solución es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[K\omega\frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}\right] = \frac{K\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}\right]\right)$$

e identificando en tablas:

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right); \qquad \text{si } \omega \neq \omega_0}$$

Si se produce resonancia, esto es, $\omega = \omega_0$, entonces la transformada de Laplace de la función que proporciona la posición de la masa $y(t)$ es

$$\mathcal{L}[y] = K\omega_0 \frac{1}{(s^2+\omega_0^2)^2} \quad \longrightarrow \quad y(t) = K\omega_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)^2}\right]$$

e identificando en tablas:

$$\boxed{y(t) = K\,\frac{\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0^2}; \qquad \text{si} \ \ \omega = \omega_0}$$

E2. EJEMPLO 2: Ecuación en derivadas parciales de primer orden

Considérese el siguiente problema de primer orden

$$\frac{x}{L}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0, \quad w(x,0) = 0, \quad w(0,t) = t; \qquad x \in [0,+\infty), \quad t \in [0,+\infty)$$

siendo L una longitud y c una velocidad características.

Aplicando la transformada de Laplace (en la variable tiempo) a la ecuación diferencial se obtiene:

$$\mathcal{L}\left[\frac{x}{L}\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x}\right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{x}{cL}\mathcal{L}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] = 0$$

Si se tiene en cuenta que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right] = s\mathcal{L}[w(x,t)] - w(x,0) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right] = s\mathcal{L}[w(x,t)]$$

y

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st}w(x,t)dt\right) = \frac{\partial \mathcal{L}[w(x,t)]}{\partial x}$$

si definimos $W(x,s) = \mathcal{L}[w(x,t)]$, entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right] = sW(x,s); \qquad \mathcal{L}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial W(x,s)}{\partial x}$$

por lo que la transformada de Laplace de la ecuación en derivadas parciales queda de la forma

$$\frac{xs}{cL}W(x,s) + \frac{\partial W(x,s)}{\partial x} = 0$$

Asimismo si se aplica la transformada de Laplace a la condición de contorno $w(0,t) = t$, de modo que $\mathcal{L}[w(0,t) - t] = 0$, es decir, $\mathcal{L}[w(0,t)] - \mathcal{L}[t] = 0$ resulta $\mathcal{L}[w(0,t)] = 1/s^2$, o lo que es lo mismo $W(0,s) = 1/s^2$.

En consecuencia hay que resolver el problema formado por la transformada de Laplace de la ecuación en derivadas parciales, y la transformada de Laplace de la condición de contorno:

$$\frac{xs}{cL}W(x,s)+\frac{\partial W(x,s)}{\partial x}=0;\qquad W(0,s)=\frac{1}{s^2}$$

cuya solución es

$$W(x,s)=\frac{1}{s^2}e^{-sx^2/(2cL)}$$

La solución al problema planteado $w(x,t)$ es la transformada de Laplace inversa de $W(x,s)$, esto es,

$$w(x,t)=\mathcal{L}^{-1}[W(x,s)]\quad\longrightarrow\quad w(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}e^{-sx^2/(2cL)}\right]$$

Si ahora se tiene en cuenta la propiedad de desplazamiento en el tiempo (apartado **5.**) y se identifican los correspondientes términos, resulta que $\widetilde{T}=x^2/(2cL)$ (que efectivamente tiene unidades de tiempo, ya que c es una velocidad y L una longitud), y dado que la transformada inversa de $\frac{1}{s^2}$ es t, la solución final es:

$$w(x,t)=(t-\widetilde{T})u(t-\widetilde{T});\qquad \text{siendo}\quad \widetilde{T}=\frac{x^2}{2cL}$$

donde $u(\cdot)$ es la función escalón. En consecuencia, la solución viene dada por

$$\boxed{w(x,t)=\begin{cases} t-\dfrac{x^2}{2cL}; & t\geq\dfrac{x^2}{2cL}\\[2ex] 0; & t<\dfrac{x^2}{2cL}\end{cases}}$$