EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
NO HOMOGÉNEO POR DESARROLLO EN FUNCIONES PROPIAS

1. PROBLEMA NO-HOMOGÉNERO CON CONDICIONES DE CONTORNO HOMOGÉNEAS

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{M}(u(x,t)) + Q(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0 \\
&\alpha_0 u(0,t) + \beta_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \\
&\alpha_L u(L,t) + \beta_L \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \\
&u(x,0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq L
\end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\mathcal{M}(\cdot)$ el operador diferencial

$$\mathcal{M}(\cdot) = \frac{1}{p(x)} \mathcal{L}(\cdot), \qquad p(x) > 0, \tag{2}$$

y $\mathcal{L}(\cdot)$ el operador diferencial de Sturm-Liouville

$$\mathcal{L}(\cdot) = \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{d(\cdot)}{dx}\right) + q(x)(\cdot), \qquad r(x) > 0 \tag{3}$$

1.1. Obtención de las funciones propias: Resolución del problema homogéneo

En primer lugar deben obtenerse las funciones propias del problema homogéneo de (1), esto es,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \mathcal{M}(w(x,t)), \quad 0 < x < L, t > 0 \\
&\alpha_0 w(0,t) + \beta_0 \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \\
&\alpha_L w(L,t) + \beta_L \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \\
&w(x,0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq L
\end{aligned} \tag{4}$$

De hecho no es estrictamente necesario resolver completamente el problema (4), sino que basta con obtener sus funciones propias por separación de variables. Así, si se descompone $w(x,t) = \phi(x)T(t)$ y se separan variables en (4) se obtiene el problema de contorno

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(\phi_n(x)) = \lambda_n \phi_n(x), \quad 0 < x < L \\
&\alpha_0 \phi_n(0) + \beta_0 \phi_n'(0) = 0, \\
&\alpha_L \phi_n(L) + \beta_L \phi_n'(L) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\phi_n(x)$ denota la función propia asociada al valor propio λ_n para $n = 1, 2, ...$ El problema de contorno (5) es equivalente al problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\phi_n(x)) - \lambda_n p(x)\phi_n(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ &\alpha_0\phi_n(0) + \beta_0\phi_n'(0) = 0, \\ &\alpha_L\phi_n(L) + \beta_L\phi_n'(L) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

cuyas soluciones no triviales (las funciones propias asociadas a cada valor propio) son ortogonales respecto de la función de peso $p(x)$, esto es

$$\int_0^L p(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx \longrightarrow \begin{cases} = 0; & i \neq j \\ \\ \neq 0; & i = j \end{cases} \tag{7}$$

1.2. Resolución del problema no-homogéneo

Conocidas las funciones propias del problema homogéneo, podemos pasar a resolver el problema (1) desarrollando la solución $u(x,t)$ como una serie generalizada de funciones propias $\phi_n(x)$. Así si consideramos que la solución $u(x,t)$ es una serie de la forma

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\phi_n(x)} \tag{8}$$

donde $u_n(t)$ son funciones en la variable t que deberemos determinar de forma que se satisfaga (1).

Si derivamos respecto al tiempo y aplicamos el operador $\mathcal{M}(\cdot)$ a la serie (8) y sustituimos en la ecuación diferencial en derivadas parciales del problema (1)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{M}(u(x,t)) + Q(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0$$

obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\mathcal{M}(\phi_n(x)) + Q(x,t), \tag{9}$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\lambda_n\phi_n(x) + Q(x,t), \tag{10}$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n'(t) - \lambda_n u_n(t)\right)\phi_n(x) = Q(x,t). \tag{11}$$

Esta igualdad establece que un desarrollo en serie generalizada de funciones propias debe ser igual a la función conocida $Q(x,t)$.

Así, si de desarrolla esta función en serie generalizada de $\phi_n(x)$ tendremos

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\phi_n(x) \qquad q_n(t) = \frac{(Q,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)} \tag{12}$$

siendo (f,g) el producto interno entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definido en $0 < x < L$ respecto de la función de peso $p(x)$ como:

$$(f,g) = \int_0^L p(x)f(x)g(x)dx. \tag{13}$$

Y ahora sustituyendo (12) en (11), resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n'(t) - \lambda_n u_n(t) - q_n(t)\right)\phi_n(x) = 0.$$

que se verifica para todo punto x si se $u_n(t)$ satisface la EDO Lineal de primer orden:

$$u_n'(t) - \lambda_n u_n(t) - q_n(t) = 0 \tag{14}$$

cuya solución general es

$$u_n(t) = e^{\lambda_n t}\left(K_n + \int_0^t q_n(\tau)e^{-\lambda_n \tau}d\tau\right) \tag{15}$$

donde K_n es una constante. Esta constante se determina finalmente imponiendo que la solución en serie (8) con $u_n(t)$ dada por (15) verifique la condición inicial $u(x,0) = \Psi(x)$, esto es que

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\left(K_n + \int_0^t q_n(\tau)e^{-\lambda_n \tau}d\tau\right)\phi_n(x)} \tag{16}$$

evaluada para $t = 0$ sea $\Psi(x)$. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n\phi_n(x) = \Psi(x) \tag{17}$$

por lo que K_n vale

$$K_n = \frac{(\Psi,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)} \tag{18}$$

con la definición de producto interno dada por (13).

La solución final viene dada por (16) donde $q_n(t)$ se obtiene de (12) y K_n de (18), y los valores propios λ_n y las correspondientes funciones propias $\phi_n(x)$ de la resolución del problema de contorno (6).

2. PROBLEMA NO-HOMOGÉNERO CON CONDICIONES DE CONTORNO NO-HOMOGÉNEAS

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{M}(u(x,t)) + Q(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0 \\
&\alpha_0 u(0,t) + \beta_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \gamma_0(t), \quad t \geq 0 \\
&\alpha_L u(L,t) + \beta_L \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \gamma_L(t), \quad t \geq 0 \\
&u(x,0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq L
\end{aligned}
\tag{19}
$$

siendo $\mathcal{M}(\cdot)$ el operador diferencial definido en (2).

2.1. Obtención de las funciones propias: Resolución del problema homogéneo

En primer lugar, es preciso obtener las funciones propias del problema homogéneo de (19) que es (4), por lo que las funciones propias $\phi_n(x)$ correspondientes a valores propios λ_n resultan de resolver el problema de contorno dado en (6) y cumplen, entre otras propiedades, la de ortogonalidad dada en (7).

2.2. Resolución del problema no-homogéneo

Conocidas las funciones propias del problema homogéneo, podemos pasar a resolver el problema (19) desarrollando la solución $u(x,t)$ como una serie generalizada de funciones propias $\phi_n(x)$. De modo que, de nuevo, consideraremos que la solución $u(x,t)$ es una serie de la forma dada en (8), donde ahora $u_n(t)$ son funciones en la variable t que deberemos determinar de forma que se satisfaga (19).

Si derivamos respecto al tiempo la serie (8), y desarrollamos en serie generalizada de funciones propias la función $Q(x,t)$ según (12), y sustituimos en la ecuación

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{M}(u(x,t)) + Q(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0$$

obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\phi_n(x) = \mathcal{M}(u(x,t)) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\phi_n(x). \tag{20}$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(u_n'(t) - q_n(t)\big)\, \phi_n(x) = \mathcal{M}(u(x,t)). \tag{21}$$

Esta igualdad establece que un determinado desarrollo en serie generalizada de funciones propias debe ser igual al resultado de aplicar el operador $\mathcal{M}(\cdot)$ a la función $u(x,t)$.

Así, si de desarrolla la función $\mathcal{M}(u(x,t))$ en serie generalizada de $\phi_n(x)$ tendremos

$$\mathcal{M}(u(x,t)) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t)\phi_n(x), \tag{22}$$

donde $m_n(t)$ son funciones en la variable t que vienen dados por

$$m_n(t) = \frac{(\mathcal{M}(u), \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} \tag{23}$$

y en consecuencia, de (21):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(u_n'(t) - m_n(t) - q_n(t)\big)\, \phi_n(x) = 0. \tag{24}$$

Si tenemos en cuenta la definición de producto interno dado en (13), el término $(\mathcal{M}(u), \phi_n)$ del coeficiente $m_n(t)$ de (23) es

$$(\mathcal{M}(u), \phi_n) = \int_0^L p(x)\mathcal{M}(u(x,t))\phi_n(x)dx = \int_0^L \mathcal{L}(u(x,t))\phi_n(x)dx \tag{25}$$

donde se ha introducido la definición del operador $\mathcal{M}(\cdot)$ dada en (2).

Por otra parte, y dado que para dos funciones cualesquiera U y V de clase $\mathcal{C}^{(2)}$ en un dominio (a,b) se cumple la Identidad de Green

$$\int_a^b (U(x)\mathcal{L}(V(x)) - V(x)\mathcal{L}(U(x)))dx = \big[r(x)(U(x)V'(x) - V(x)U'(x))\big]\Big|_a^b, \tag{26}$$

si elegimos $U = u$ y $V = \phi_n$ en el dominio $(0, L)$, resulta

$$\begin{aligned} &\int_0^L u(x,t)\mathcal{L}(\phi_n(x))dx - \int_0^L \phi_n(x)\mathcal{L}(u(x,t))dx = \\ &r(L)\left(u(L,t)\phi_n'(L) - \phi_n(L)\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}\right) - r(0)\left(u(0,t)\phi_n'(0) - \phi_n(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Obsérvese que el segundo sumando del término de la izquierda de la igualdad (27) es precisamente el término dado en (25). Por tanto, si se despeja dicho término y se tienen en cuenta que las funciones propias $\phi_n(x)$ satisfacen las condiciones de contorno homogéneas del problema (5), se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_0^L \phi_n(x)\mathcal{L}(u(x,t))dx = \int_0^L u(x,t)\mathcal{L}(\phi_n(x))dx - \\ &- r(L)\left(u(L,t) + \frac{\beta_L}{\alpha_L}\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}\right)\phi_n'(L) + r(0)\left(u(0,t) + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)\phi_n'(0). \end{aligned} \tag{28}$$

Seguidamente, si tenemos en cuenta que u debe cumplir las condiciones de contorno dadas por (19), resulta

$$\int_0^L \phi_n(x)\mathcal{L}(u(x,t))dx = \int_0^L u(x,t)\mathcal{L}(\phi_n(x))dx - r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0), \tag{29}$$

e introduciendo ahora la relación $\mathcal{L}(\phi_n(x)) = \lambda_n p(x)\phi_n(x)$ de (6) obtendremos

$$\int_0^L \phi_n(x)\mathcal{L}(u(x,t))dx = \lambda_n \int_0^L p(x)u(x,t)\phi_n(x)dx - r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0), \tag{30}$$

y finalmente por (25)

$$(\mathcal{M}(u), \phi_n) = \lambda_n \int_0^L p(x)u(x,t)\phi_n(x)dx - r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0). \tag{31}$$

Si ahora sustituimos este resultado en (23) obtenemos que los coeficientes $m_n(t)$ vienen dados por

$$m_n(t) = \lambda_n \frac{\displaystyle\int_0^L p(x)u(x,t)\phi_n(x)dx}{(\phi_n, \phi_n)} + \frac{-r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)}. \tag{32}$$

Por otra parte, dado que

$$\int_0^L p(x)u(x,t)\phi_n(x)dx = (u, \phi_n),$$

entonces

$$\begin{aligned} m_n(t) &= \lambda_n \frac{(u, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} + \frac{-r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)} \\ &= \lambda_n u_n(t) + \frac{-r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Sustituyendo ahora $m_n(t)$ de (33) en (24), obtendremos que debe cumplirse para todo punto x la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n'(t) - \lambda_n u_n(t) + \frac{-r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)} - q_n(t) \right) \phi_n(x) = 0, \tag{34}$$

es decir, verificarse la EDO Lineal de primer orden

$$u_n'(t) - \lambda_n u_n(t) + \frac{-r(L)\gamma_L(t)\phi_n'(L) + r(0)\gamma_0(t)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)} - q_n(t) = 0 \tag{35}$$

Si se compara este resultado con la EDO obtenida en (15) para el problema con condiciones de contorno homogéneas, se puede observar cómo intervienen las condiciones de contorno cuando estas no son homogéneas.

A partir de este punto, la integración de la EDO y la imposición de la condición inicial son similares a las de la ecuación diferencial (14) obteniéndose finalmente

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \left(K_n + \int_0^t \left[q_n(\tau) + \frac{r(L)\gamma_L(\tau)\phi_n'(L) - r(0)\gamma_0(\tau)\phi_n'(0)}{(\phi_n, \phi_n)} \right] e^{-\lambda_n \tau} d\tau \right) \phi_n(x)}$$

donde K_n viene dada por (18).