SERIES DE FOURIER MÚLTIPLES

El desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x,y)$ donde $-L < x < +L$ y $-H < y < +H$ se obtiene desarrollando en serie de Fourier en cada una de las variables independientes, esto es, para cada valor de y fijo se tiene

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\alpha_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m(y)\cos\frac{m\pi x}{L} + \beta_m(y)\sin\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

siendo los coeficientes $\alpha_0(y)$, $\alpha_m(y)$ y $\beta_m(y)$ los siguientes:

$$\begin{aligned}
\alpha_m(y) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(s,y)\cos\frac{m\pi s}{L}\,ds;\quad m = 0,1,2,\dots \\
\beta_m(y) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(s,y)\sin\frac{m\pi s}{L}\,ds;\quad m = 1,2,\dots
\end{aligned} \tag{2}$$

Seguidamente desarrollamos en serie de Fourier cada una de las funciones en la variable y obtenidas en (2), es decir,

$$\begin{aligned}
\alpha_m(y) &= \frac{1}{2}a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\frac{n\pi y}{H} + b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{H}\right);\quad m = 0,1,2,\dots \\
\beta_m(y) &= \frac{1}{2}c_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{mn}\cos\frac{n\pi y}{H} + d_{mn}\sin\frac{n\pi y}{H}\right);\quad m = 1,2,\dots
\end{aligned} \tag{3}$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned}
a_{mn} &= \frac{1}{LH}\int_{-L}^{+L}\int_{-H}^{+H} f(s,z)\cos\frac{m\pi s}{L}\cos\frac{n\pi z}{H}\,ds\,dz;\quad m = 0,1,2,\dots;\ n = 0,1,2,\dots \\
b_{mn} &= \frac{1}{LH}\int_{-L}^{+L}\int_{-H}^{+H} f(s,z)\cos\frac{m\pi s}{L}\sin\frac{n\pi z}{H}\,ds\,dz;\quad m = 0,1,2,\dots;\ n = 1,2,\dots \\
c_{mn} &= \frac{1}{LH}\int_{-L}^{+L}\int_{-H}^{+H} f(s,z)\sin\frac{m\pi s}{L}\cos\frac{n\pi z}{H}\,ds\,dz;\quad m = 1,2,\dots;\ n = 0,1,2,\dots \\
d_{mn} &= \frac{1}{LH}\int_{-L}^{+L}\int_{-H}^{+H} f(s,z)\sin\frac{m\pi s}{L}\sin\frac{n\pi z}{H}\,ds\,dz;\quad m = 1,2,\dots;\ n = 1,2,\dots
\end{aligned} \tag{4}$$

En resumen, si se sustituyen los desarrollos de (3) en (1) obtendremos la expresión del desarrollo en serie de Fourier múltiple de una función de dos variables:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x,y) = {} & \frac{1}{4}a_{00} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{m0}\cos\frac{m\pi x}{L} + c_{m0}\sin\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0n}\cos\frac{n\pi y}{H} + b_{0n}\sin\frac{n\pi y}{H}\right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{H} + b_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{H}\right. \\
& \left. + c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{H} + d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{H}\right)
\end{aligned}}$$