

SERIES DE FOURIER

1. INTRODUCCIÓN

Series trigonométricas de Fourier

El primer aspecto importante en el estudio de las Series de Fourier lo constituye el relativo a cuándo una función f definida en un intervalo arbitrario $(\alpha - L, \alpha + L)$, $L > 0$, puede ser representada en términos de una serie convergente de funciones trigonométricas. Es decir, enunciado de un modo más sencillo: dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ¿en qué condiciones es posible determinar los coeficientes a_n y b_n tales que

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

en cualquier punto $x \in (-\pi, +\pi)$?[†]

La determinación de los coeficientes a_n y b_n es sencilla si se introducen varias hipótesis: Así, si la serie (1) es convergente y la igualdad se satisface en todos los puntos del dominio, y se asume que la serie se puede integrar término a término entre $-\pi$ y $+\pi$, y que todo ello también es cierto cuando los dos miembros de la igualdad (1) se multiplican por funciones arbitrarias $\cos mx$ ó $\sin mx$ ($m \in \mathbb{N}$), entonces en el caso de multiplicar (1) por $\cos mx$ e integrar se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx \right) \quad (2)$$

[†] En apartados posteriores se estudiarán la obtención de Series de Fourier de funciones definidas en intervalos arbitrarios.

Si además se hace uso de los siguientes resultados:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n, n \neq 0; \\ 2\pi, & \text{si } m = n, n = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0; \quad \forall m, n, \quad (4)$$

se concluye que cualquier coeficiente a_m se puede calcular como

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5a)$$

Procediendo del mismo modo, y multiplicando (1) por $\sin mx$ e integrando se obtiene una expresión parecida para determinar cualquier coeficiente b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx; \quad m = 1, 2, \dots \quad (5b)$$

Este método de determinación de los coeficientes de las series trigonométricas (1) fue ideado originalmente por Euler en 1777.

Llegados a este punto no tenemos ninguna garantía de que las hipótesis que hemos establecido acerca de la convergencia de la serie (1) y de su integración término a término sean válidas. Sobre estos aspectos incidiremos más adelante; por el momento asumiremos que las expresiones (5a) y (5b) son válidas, y las adoptaremos como punto de partida.

Si las integrales involucradas existen, se denominan “Coeficientes de Fourier” de la función f en el intervalo $(-\pi, +\pi)$ a los números a_n y b_n calculados mediante (5a) y (5b). La serie (1) obtenida con estos coeficientes se denomina “Serie de Fourier” de la función f en $(-\pi, +\pi)$.

En lo sucesivo, y mientras no establezcamos que la igualdad (1) es cierta, diremos que una función f admite desarrollo en serie de Fourier cuando

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6)$$

Series de Fourier de funciones pares e impares

En ocasiones, si la función que se está estudiando tiene determinadas propiedades de “paridad”, el cálculo de sus coeficientes de Fourier se simplifica de modo notable. Así, cuando una función f es “par” (es decir, si $f(-x) = f(x)$, o sea que es simétrica respecto al eje de ordenadas) su integral entre $-\pi$ y $+\pi$ es el doble de la integral entre 0 y $+\pi$, en tanto que cuando una función es impar ($f(-x) = -f(x)$, es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas) su integral entre $-\pi$ y $+\pi$ es nula. En consecuencia, dado que la función seno es impar y la función coseno es par, las series de Fourier correspondientes a funciones pares e impares son las siguientes:

Sea f una función par definida en el intervalo $(-\pi, +\pi)$, su serie de Fourier es de la forma general

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (7a)$$

siendo a_n ,

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7b)$$

Sea f una función impar definida en el intervalo $(-\pi, +\pi)$, su serie de Fourier es de la forma general

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (8a)$$

siendo b_n ,

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx; \quad m = 1, 2, \dots \quad (8b)$$

Obviamente, y al igual que en el caso de las series de Fourier completas (1), las expresiones (7a), (7b), (8a) y (8b) se pueden generalizar para el caso de funciones

definidas en intervalos arbitrarios, mediante el consiguiente cambio de variable.

Como hemos visto, los coeficientes de Fourier se definen en términos de integrales. Por este motivo y antes de pasar a estudiar con detalle la convergencia de las series de Fourier, haremos un breve repaso del concepto de integral.

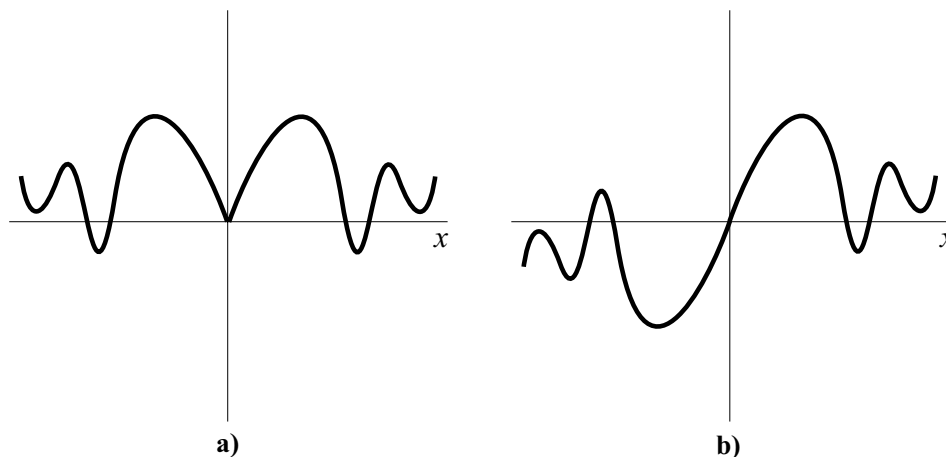


Fig. 1. Ejemplo de función par (a) y función impar (b)).

2. EL TEOREMA DE RIEMANN-LEBESGUE

Definición de integral de Riemann

El concepto más ampliamente extendido de “integral” de una función f hasta mediados del siglo XVIII era el de la integral “indefinida”, es decir la antiderivada de una función primitiva F , de modo que una vez obtenida ésta, si se hacía uso de las reglas de derivación, se recuperaba la función f . Este concepto era suficiente hasta ese momento para el tipo de aplicaciones en las que se empleaba, y tenía la ventaja de que era fácil de entender. Por supuesto, Leibnitz ya había definido años antes la integral en términos de una suma (de hecho, el símbolo “integral” había sido introducido por él mismo alargando la letra inicial de la palabra “suma”). No obstante, su idea no había sido plenamente aceptada por sus contemporáneos, que no veían demasiado claro cómo llevar a cabo una “suma infinita de pequeñas cantidades”. Por este motivo, la noción extendida de integral como la antiderivada de otra función se mantuvo hasta que Fourier inició el estudio de funciones que no podían expresarse analíticamente, tales como las funciones definidas por tramos de curvas distintas, para las cuales el concepto de “antiderivada” resultaba insuficiente. Asimismo, Fourier constató que, por ejemplo, el coeficiente b_n dado

por (8b) puede interpretarse como el área bajo la curva $f(x)$ sin nx entre $-\pi$ y $+\pi$, tanto si la función f es continua como si no lo es.

Esta interpretación de Fourier de la integral como un área pudo ser el origen de la definición de “integral definida”[†] de una función dada por Cauchy en 1823: “Si f es una función real de variable real, continua en un intervalo $[a, b]$, y si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ son puntos tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad (9)$$

en la hipótesis de que, para cada subintervalo k , la distancia entre x_k y x_{k-1} tiende a cero cuando n tiende a infinito”. Cauchy demostró (con ciertas limitaciones, dado que en ese momento todavía no se había establecido el concepto de continuidad uniforme) la existencia de este límite y su independencia con el modo de formar los subintervalos en $[a, b]$. Esta definición de Cauchy constituyó la base para la demostración, por parte de Dirichlet, de uno de los primeros teoremas de convergencia de las series de Fourier para funciones continuas y funciones con un número finito de discontinuidades. De hecho, el requisito de continuidad de la función que se establece en la definición de Cauchy fue introducido por Dirichlet precisamente para poder garantizar la existencia de las integrales definidas que aparecen en los coeficientes de Fourier.

No obstante, la generalización de la demostración de la convergencia de series de Fourier de funciones con un número infinito de discontinuidades requería asegurar que sus integrales definidas existen, y para este fin la definición de Cauchy es insuficiente. Dirichlet no lograría esta generalización ni dar con las condiciones de integrabilidad de estas funciones discontinuas. Fue un alumno suyo, Riemann, quien establecería estas condiciones, modificando la definición de integral definida de Cauchy: En primer lugar, cambiando el factor $f(x_{k-1})$ por $f(t_k)$, siendo t_k un punto del subintervalo entre x_{k-1} y x_k , y seguidamente, suprimiendo el requisito de continuidad de la función f . En su lugar, definió que “una función es integrable si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}), \quad (10)$$

existe”, y estableció las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dicho límite existe, demostrando la validez de esta definición en múltiples aplicaciones. La definición de Riemann fue perfeccionada por Darboux en 1875, quien también

[†] De hecho, la notación de “integral definida” $\int_a^b f$ adoptada por Cauchy, se debe originalmente a Fourier.

enunció la correspondiente versión del teorema fundamental del Cálculo. En la terminología moderna esta definición es la siguiente:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en un intervalo (a, b) . Sea $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ una “partición” de $[a, b]$, es decir, un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Sea M_k ($1 \leq k \leq n$) la colección de los menores números reales que son mayores que cualquier valor de la función f en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) ; y sea m_k ($1 \leq k \leq n$) la colección de los mayores números reales que son menores que cualquier valor de la función f en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) —obviamente, si la función f tiene un máximo en (x_{k-1}, x_k) entonces M_k es dicho máximo, y si tiene un mínimo ése es m_k —. Entonces se dice que la función es “integrable en el sentido de Riemann”, o simplemente “integrable”, en el intervalo (a, b) , si y solo si existe un único número real I tal que

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq I \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}), \quad (11)$$

cualquiera que sea la partición de $[a, b]$. Este valor real I se denomina “integral de Riemann de f en (a, b) ” y se denota como $\int_a^b f$.

Este teorema es fundamental en tanto proporciona las condiciones de integrabilidad de una función. No obstante, no es fácil determinar por aplicación directa del mismo si dada una función acotada ésta es integrable en el sentido de Riemann. Lebesgue en 1904 dio un sencillo criterio de integrabilidad basado en el siguiente concepto: Un subconjunto de \mathbb{R} se dice que es de “medida cero” si y solo si puede quedar contenido en una secuencia finita o infinita de intervalos abiertos cuya longitud total combinada —es decir, la suma de las series finitas o infinitas cuyos términos son las longitudes de los intervalos individuales— es arbitrariamente pequeña, y por tanto menor que cualquier número real positivo que se elija. A continuación, Lebesgue demostró que una función f es integrable en el sentido de Riemann en (a, b) si y solo si el conjunto de puntos en los que f es discontinua tiene medida cero.

Definición de “función continua a trozos”

A la vista de las definiciones anteriores, está claro que, en particular, una función acotada y continua es integrable en (a, b) . Así mismo en el ámbito que nos ocupa —el estudio de las series de Fourier—, nos vamos a encontrar con frecuencia

con un tipo de funciones integrables discontinuas: las funciones “continuas por subintervalos”, “continuas a trozos” o “seccionalmente continuas”.

Una función es “continua por subintervalos” o “continua a trozos” en un intervalo (a, b) si y solo si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ en la que f es continua en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) ($1 \leq k \leq n$), y los límites

$$f(x_{k-1}^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{k-1} \\ x > x_{k-1}}} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_k^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_k \\ x < x_k}} f(x) \quad (12)$$

existen y son finitos.

Obsérvese que dado que los límites laterales $f(x_{k-1}^+)$ y $f(x_k^-)$ existen, la función f se puede extender como una función continua en cada intervalo cerrado $[x_{k-1}, x_k]$. Por tanto, y dado que f está acotada y tiene un número finito de discontinuidades, f es integrable según el criterio de integrabilidad de Lebesgue (en este caso particular, también se puede probar la integrabilidad de f aplicando la definición dada por (11)).

Ej.2.1.— La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en $(0, 1)$ por $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ está acotada y es continua en $(0, 1)$, pero no es continua a trozos porque $f(0^+)$ no existe.

Ej.2.2.— La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en $(0, 1)$ por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases}$ no es continua en $(0, 1)$, pero sí es continua a trozos.

Ej.2.3.— La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en $(0, 1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}; \quad (n = 1, 2, \dots); \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1; \end{cases}$$

no es continua ni continua a trozos en $(0, 1)$, porque tiene infinitos puntos de discontinuidad. Sin embargo es integrable en $(0, 1)$ en el sentido de Lebesgue (!).

Enunciado y demostración del teorema de Riemann-Lebesgue

Un resultado esencial en el desarrollo posterior que presentaremos lo constituye la demostración de que los coeficientes de Fourier a_n y b_n —(5a) y (5b)— tienden a cero cuando n tiende a infinito. Este hecho fue constatado por Fourier en 1854 y demostrado a partir de su definición de integral definida. No obstante, Lebesgue generalizó en 1903 este resultado para el caso general de considerar un intervalo arbitrario (a, b) —en lugar de $(-\pi, +\pi)$ — y un valor real positivo r —en lugar de un valor entero positivo n —. Este teorema de Riemann-Lebesgue puede enunciarse del siguiente modo:

Sea f una función integrable en (a, b) . Entonces se verifica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin rx \, dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos rx \, dx = 0. \quad (13)$$

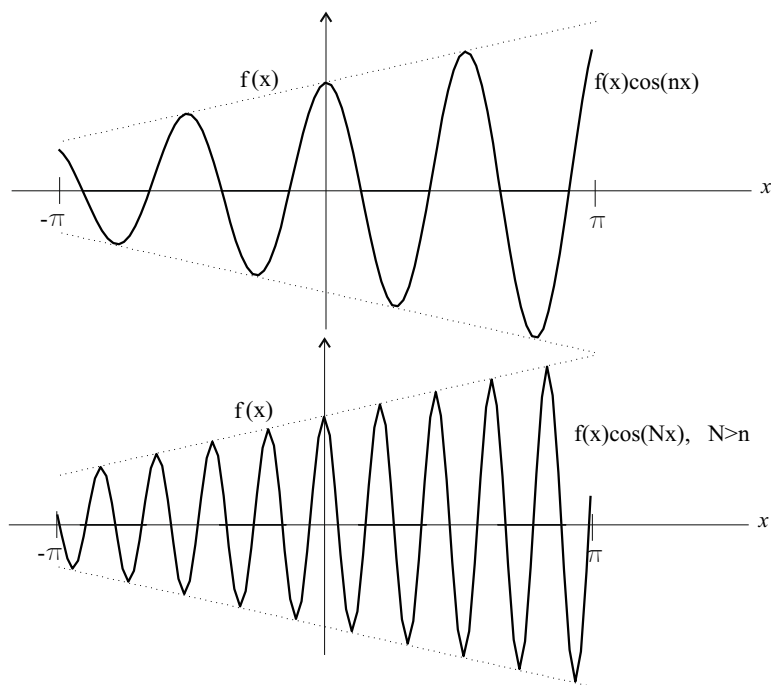


Fig. 2. Para una función $f(x)$ cualquiera, las áreas que forma la curva de la función $f(x)\cos(nx)$ con el eje de abscisas tienen a anularse entre sí cuando el valor de n aumenta.

▷ Su demostración es la siguiente: Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ una partición de $[a, b]$, y sea m_k el mayor número menor que cualquier valor de f en (x_{k-1}, x_k) —es decir, el ínfimo de f en (x_{k-1}, x_k) —. Definamos la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en (a, b) como

$$g(x) = \begin{cases} m_k, & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k); \\ f(x), & \text{si } x = x_k; \end{cases} \quad k = 1, \dots, n.$$

Es evidente que $g \leq f$ en (a, b) . Así tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin rx \, dx - \int_a^b g(x) \sin rx \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) \sin rx - g(x) \sin rx| \, dx \\ &\leq \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

De acuerdo con la definición de integral definida de Riemann —expresión (11)— y el criterio de integrabilidad dado por Lebesgue, dado un número positivo arbitrario ϵ , la partición del intervalo $[a, b]$ puede elegirse con un espaciado lo suficientemente pequeño para que el término de la derecha de (14) sea menor que $\epsilon/2$. De este modo, y haciendo uso de la desigualdad $|c| \leq |d| + |c - d|$, válida para cualquier par de números reales c y d , obtenemos,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin rx \, dx \right| < \left| \int_a^b g(x) \sin rx \, dx \right| + \frac{\epsilon}{2} \quad (15)$$

Por otra parte, para $r > 0$, el primer sumando del miembro de la derecha de (15) se puede acotar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) \sin rx \, dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k \sin rx \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{r} (\cos rx_{k-1} - \cos rx_k) \right| \\ &\leq \frac{2}{r} \sum_{k=1}^n |m_k|, \end{aligned} \quad (16)$$

que para valores de r suficientemente grandes es menor que $\epsilon/2$, por lo que, sustituyendo en (15), se obtiene

$$\left| \int_a^b f(x) \sin rx \, dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (17)$$

Así, al ser el valor de ϵ arbitrariamente pequeño, el primer límite de (13) vale idénticamente cero para valores de $r \rightarrow \infty$.

La demostración correspondiente al segundo de los límites de (13) se obtiene de forma análoga.◁

3. CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

En 1829 Dirichlet demostró que la serie de Fourier de una función acotada f con un número finito de discontinuidades de salto y un número finito de máximos y mínimos en $(-\pi, +\pi)$ converge a $f(x)$ en cada punto de x en el que la función es continua. Posteriormente, en 1854, Riemann descubriría que la convergencia de estas series de Fourier depende exclusivamente de los valores de f en un intervalo centrado en x arbitrariamente pequeño (lo que se conoce como “principio de localización de Riemann”). Seguidamente presentaremos una sencilla demostración de la convergencia de la serie de Fourier de una función basada en la combinación de los resultados de Dirichlet y Riemann, y del teorema de Riemann-Lebesgue.

Suma parcial de la Serie de Fourier de una función continua a trozos

Nuestro punto de partida lo constituye la manipulación analítica de una suma parcial arbitraria de la serie de Fourier (1); así, si se denomina

$$s_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (17)$$

para $N \geq 1$, y se sustituye el valor de los coeficientes de Fourier (5a) y (5b), se obtiene

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left[\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \, ds + \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos n(s-x) \right] ds. \end{aligned} \quad (18)$$

En este punto, existen diversas posibilidades para calcular el término en cosenos del integrando de (18), según se elija una identidad trigonométrica u otra. La que proporciona el desarrollo posterior más sencillo —obtenido por Dirichlet— es la siguiente identidad,

$$2 \sin \frac{s}{2} \cos ns = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) s,$$

de modo que, escribiendo esta identidad para los distintos valores de n , desde 1 hasta N , y sumándolas todas se obtiene

$$2 \sin \left(\frac{s}{2} \right) \sum_{n=1}^N \cos ns = \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) s - \sin \left(\frac{s}{2} \right). \quad (19)$$

Teniendo en cuenta ahora que $-\pi \leq s \leq +\pi$, entonces si $s \neq 0$,

$$1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos ns = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) s}{\sin \left(\frac{s}{2} \right)} \quad (20)$$

y si $s \rightarrow 0$, el miembro de la derecha de (20) tiende a $(2N+1)$, que es precisamente el valor del término del lado izquierdo cuando $s = 0$. En consecuencia se trata de una función continua a trozos, por lo que sustituyendo (20) en (18), resulta

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) (s-x) \right)}{\sin \left(\frac{s-x}{2} \right)} ds. \quad (21)$$

Esta expresión puede escribirse de un modo más compacto, si se define la función $D_N(s)$, denominada “núcleo de Dirichlet”,

$$D_N(s) = \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \left(\frac{s}{2} \right)}. \quad (22)$$

De este modo, obtenemos el siguiente resultado:

Sea f una función integrable en $(-\pi, +\pi)$; sea $s_N(x)$ la N -ésima suma parcial de su serie de Fourier en $(-\pi, +\pi)$ (dada por (17)); y sea D_N el núcleo de Dirichlet, definido en (22). Entonces se verifica que

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(s - x) ds, \quad (23)$$

y

$$\int_0^{\pi} D_N(s) ds = \pi. \quad (24)$$

(La igualdad (24) se puede demostrar sin más que integrar entre 0 y π el término de la izquierda de (20)).

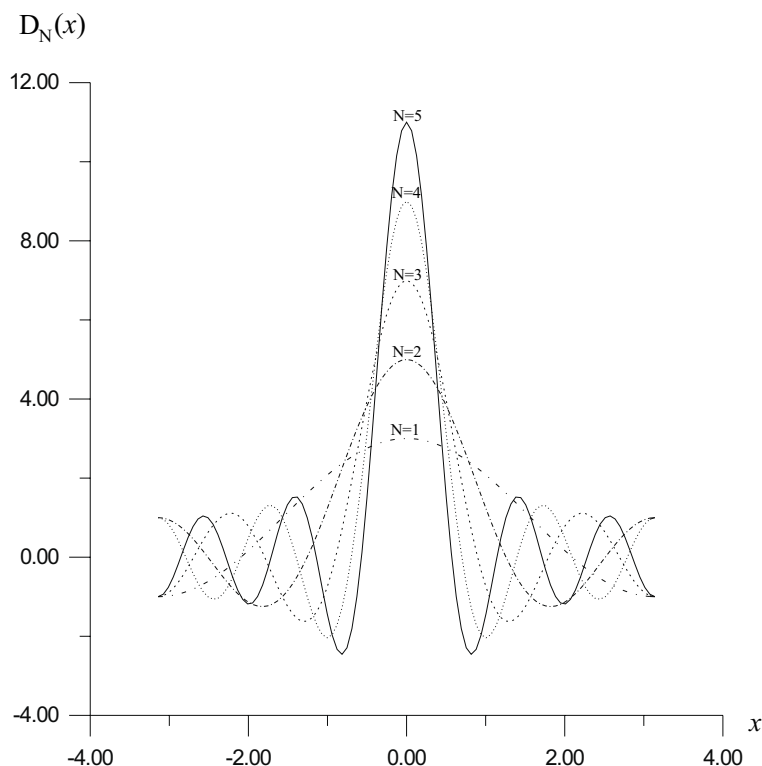


Fig. 3. Núcleo de Dirichlet $D_N(x)$ evaluado para distintos valores de N .

Este núcleo de Dirichlet constituye la base de la demostración de la convergencia de las series de Fourier. En la figura 4, se muestra la representación gráfica de $D_N(s - x)$ frente a s para un valor de N grande. Las raíces del núcleo

de Dirichlet son los puntos $s = x + k\delta$, siendo k un número entero no nulo y $\delta = 2\pi/(2N + 1)$. Si nos fijamos en la figura 4, para cada valor de N , podemos considerar el arco principal de la función $D_N(s - x)$ como una “ventana” casi triangular que en el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ nos permite “ver” una parte de la función $f(x)$ (la porción de función que se “verá” será tanto más pequeña cuanto mayor sea N dado que la amplitud 2δ del subintervalo de “muestreo” de la función será menor); y podemos “ver” toda la función f variando x , es decir moviendo la “ventana” triangular. Por otra parte, según la expresión (23), cuando integramos $f(s) D_N(s - x)$ entre $-\pi$ y $+\pi$, la representación de la figura 4 parece sugerir que la contribución a (23) de la integral de la parte del dominio fuera del intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ va a ser despreciable. En el interior de dicho intervalo, a medida que N aumenta y δ disminuye, $f(s)$ se aproxima a $f(x)$ y el área bajo el arco principal de $D_N(s - x)$ se aproxima a $(2N + 1)\delta$, es decir a 2π . En consecuencia, para valores de N grandes,

$$s_N(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(s) D_N(s-x) ds \approx \frac{f(x)}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} D_N(s-x) ds \approx f(x)$$

por lo que es razonable esperar que $s_N(x) \rightarrow f(x)$ cuando $N \rightarrow \infty$, como seguidamente probaremos.

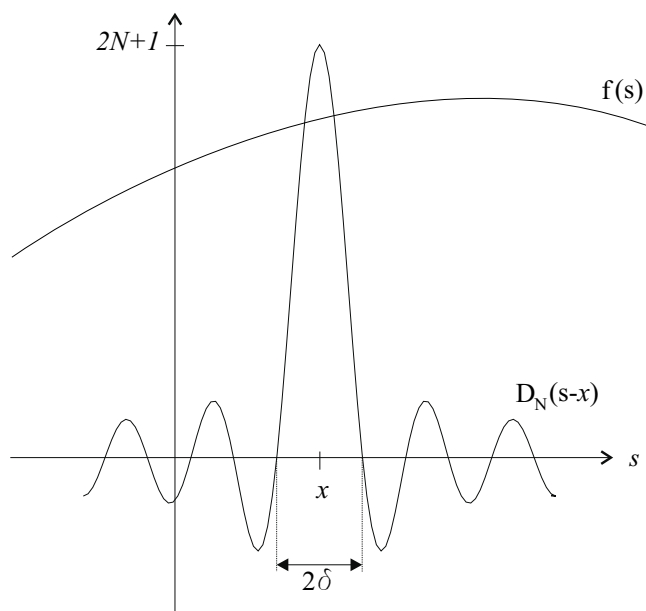


Fig. 4.

Suma parcial de la Serie de Fourier de una función periódica

El planteamiento y la posterior demostración de la convergencia de la serie de Fourier son más sencillos si la función f se extiende más allá del intervalo $(-\pi, +\pi)$ como una función periódica de periodo 2π . Esta extensión facilitará el desarrollo ulterior y por supuesto no altera la serie de Fourier de f en $(-\pi, +\pi)$, dado que los coeficientes se continúan evaluando como integrales en este dominio. Así, si se extiende la función f y se efectúa el cambio de variable $z = x - s$ (téngase en cuenta que el núcleo de Dirichlet (22) es una función par), resulta

$$s_N(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-z) D_N(-z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-z) D_N(z) dz \quad (25)$$

Al ser ahora el integrando una función periódica de periodo 2π , el integrando tiene el mismo valor sobre cualquier intervalo de longitud 2π , por lo que

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) D_N(z) dz. \quad (26)$$

Si se procede de un modo similar pero efectuando el cambio de variable $z = s - x$, se obtiene

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_N(z) dz. \quad (27)$$

La suma de las expresiones (26) y (27), conduce a una integral definida cuyo integrando contiene el término $f(x+z) + f(x-z)$ que es una función par, del mismo modo que el núcleo de Dirichlet, por lo que la suma parcial de la serie de Fourier $s_N(x)$ puede expresarse como:

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+z) + f(x-z)) D_N(z) dz. \quad (28)$$

Este resultado como se verá más adelante es esencial para demostrar la convergencia de las series de Fourier. Antes de presentar formalmente esta demostración, establezcamos los requisitos de diferenciabilidad de la función f .

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en (a, b) continua a trozos, y sea $x \in (a, b)$. Entonces la “derivada por la derecha” de f en x es

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \quad (29a)$$

si el límite existe. Así mismo la “derivada por la izquierda” de f en x es

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{-h} \quad (29b)$$

si el límite existe.

Se dice que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (a, b) es diferenciable en x si y solo si es continua en x y sus derivadas por la derecha y por la izquierda en x existen y son iguales.

Las definiciones anteriores no siempre permiten de un modo sencillo determinar si una función tiene derivadas laterales en cada punto del intervalo. No obstante, el siguiente resultado nos proporcionará una condición suficiente:

Si la función f y su derivada f' son continuas a trozos en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene derivadas laterales en cualquier punto $x \in [a, b]$, y son iguales a los límites laterales de la función f' en x .

▷ Si $x \neq b$ y f no es continua en x , redefinamos $f(x) = f(x^+)$. Entonces existe un número $h > 0$ arbitrariamente pequeño tal que f es continua en $[x, x+h]$ y f' es continua en $(x, x+h)$. Por el teorema del valor medio, existirá un punto c entre x y $x+h$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}.$$

Cuando $h \rightarrow 0$, entonces $c \rightarrow x$ y $f'(c) \rightarrow f'(x^+)$. En consecuencia, f tiene derivada por la derecha en x y vale $f'(x^+)$.

De modo similar se puede demostrar que si $x \neq a$, entonces f tiene derivada por la izquierda en cada punto y es igual a $f'(x^-)$. ◁

Es conveniente resaltar un aspecto importante del resultado anterior: la condición es suficiente pero no necesaria.

Ej.3.1.– La función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$ es diferenciable y tiene derivadas laterales en cualquier punto x . Sin embargo, si $x \neq 0$, la derivada de f

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$, por lo que f' no es una función continua a trozos.

Enunciado y demostración de la convergencia de las Series de Fourier

En este momento, estamos ya en condiciones de demostrar el teorema de Dirichlet y Riemann de convergencia de las Series de Fourier, cuyo enunciado es el siguiente:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de periodo 2π integrable en $(-\pi, +\pi)$. Si f tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y f es continua a trozos en un intervalo centrado en x arbitrariamente pequeño, entonces la serie de Fourier de f en el intervalo $(-\pi, +\pi)$ converge al valor

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \tag{30}$$

en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Si además la función f es continua en x , entonces la serie de Fourier converge a $f(x)$.

▷ Sea $0 < \varepsilon < \pi$ un número arbitrario tal que f es continua a trozos en $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Combinando las expresiones (23) y (28), se obtiene

$$\begin{aligned} s_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+z) - f(x^+) - f(x^-) + f(x-z)) D_N(z) dz, \end{aligned} \tag{31a}$$

que, teniendo en cuenta la definición (22), se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 s_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \left[\frac{f(x+z) - f(x^+)}{z} + \frac{f(x-z) - f(x^-)}{z} \right] \frac{z/2}{\sin(z/2)} \sin(N+1/2)z \, dz \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+z) - f(x^+) - f(x^-) + f(x-z)}{\sin(z/2)} \sin(N+1/2)z \, dz
 \end{aligned} \tag{31b}$$

Si f tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en x , cada uno de los cocientes de la primera integral tiene límite cuando $z \rightarrow 0$ por la derecha. Entonces, la expresión entre corchetes de la primer integral es una función continua a trozos en $(0, \varepsilon)$, ya que f lo es. El siguiente factor de este mismo integrando es continuo en $(0, \varepsilon)$, y verifica que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z/2}{\sin(z/2)} = 1.$$

En consecuencia, el integrando de la primera integral es el producto de una función continua a trozos —y por tanto, integrable— por la función $\sin(N+1/2)z$. Respecto de la segunda integral, el cociente de funciones es integrable en (ε, π) porque tanto el numerador como el denominador son integrables.

Por tanto, los integrandos de los dos sumandos del término de la derecha de (31b) están formados por el producto de funciones integrables multiplicados por la función $\sin(N+1/2)z$. Si ahora N se hace tender a infinito, por el teorema de Riemann-Lebesgue —ecuación (13)—, concluimos que cada una de las dos integrales es nula, por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0. \tag{32}$$

Es decir, la serie de Fourier de la función f —que es el límite de la sucesión de sumas parciales $s_N(x)$ — converge en cada punto x al promedio de los valores de la función en dicho punto por la derecha y por la izquierda.

Finalmente, es obvio que si la función es continua en x , su serie de Fourier converge a $f(x)$. ◁

Teniendo en cuenta que si una función f es continua a trozos en $(-\pi, +\pi)$, entonces es integrable, se puede enunciar una versión más sencilla del teorema anterior como sigue:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de periodo 2π continua a trozos en $(-\pi, +\pi)$. Entonces su serie de Fourier en $(-\pi, +\pi)$ converge al valor

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad (33)$$

en todo punto $x \in \mathbb{R}$, en el que f tiene derivadas por la derecha y por la izquierda. Si además la función f es continua en x , entonces su serie de Fourier converge a $f(x)$.

4. SERIES DE FOURIER DEFINIDAS EN INTERVALOS ARBITRARIOS

Series trigonométricas de Fourier

En el estudio presentado hasta este punto se ha considerado que las funciones son periódicas de periodo 2π definidas en $(-\pi, +\pi)$. En general, deberemos considerar funciones periódicas $g(\hat{x})$ de periodo $2L$ ($L > 0$) definidas en intervalos arbitrarios $\hat{x} \in (\alpha - L, \alpha + L)$.

Para obtener el desarrollo en serie de Fourier de g , si se efectúa el cambio de variable

$$x = \frac{\pi(\hat{x} - \alpha)}{L}, \quad (34)$$

se puede definir una nueva función f como $f(x) = g(\hat{x})$ que varía entre $-\pi$ y $+\pi$. Así, si g es periódica de periodo $2L$, entonces f lo es de periodo 2π . Asimismo, f tiene derivadas laterales en x si g las tiene en \hat{x} , y f es continua a trozos en un pequeño intervalo centrado en x si g es continua a trozos en un pequeño intervalo centrado en \hat{x} . En consecuencia, en estas condiciones, se verifica el teorema de convergencia de las series de Fourier y, por tanto,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (35a)$$

donde los coeficientes a_n y b_n se calculan mediante:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx; \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx; \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (35b)$$

Deshaciendo el cambio de variable (34), el desarrollo en serie de Fourier de $g(\hat{x})$, para $\hat{x} \in (\alpha - L, \alpha + L)$, viene dado por:

$$\frac{g(\hat{x}^+) + g(\hat{x}^-)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} \right) \quad (36a)$$

siendo los “Coeficientes de Fourier” a_n y b_n de la función g :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} g(\hat{x}) \cos \frac{m\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} d\hat{x}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} g(\hat{x}) \sin \frac{m\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} d\hat{x}; \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (36b)$$

Este resultado nos permite enunciar la versión del teorema de Dirichlet y Riemann de convergencia de las Series de Fourier para funciones definidas en intervalos arbitrarios:

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de periodo $2L$, ($L > 0$), integrable en $(\alpha - L, \alpha + L)$. Si g tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en todo punto $\hat{x} \in \mathbb{R}$ y g es continua a trozos en un intervalo centrado en \hat{x} arbitrariamente pequeño, entonces la serie de Fourier de g en el intervalo $(\alpha - L, \alpha + L)$ converge al valor

$$\frac{g(\hat{x}^+) + g(\hat{x}^-)}{2} \quad (37)$$

en todo punto $\hat{x} \in \mathbb{R}$. Si además la función g es continua en \hat{x} , entonces la serie de Fourier converge a $g(\hat{x})$.

Expansiones pares e impares de funciones definidas en semiperiodos

Consideremos una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el intervalo $(0, +L)$. Esta función se puede extender al intervalo $(-L, +L)$ como una función par, impar o de cualquier otra forma, y la nueva función resultante puede a su vez extenderse a todo el dominio de \mathbb{R} como una función periódica de periodo $2L$ —obviamente, estas extensiones deben definirse de modo tal que en todos los puntos del nuevo dominio exista el valor de $(g(\hat{x}^+) + g(\hat{x}^-))/2$ —. En el caso de las expansiones en funciones pares e impares, sus series de Fourier son más sencillas que (36a), debido a las propiedades de integración de funciones pares o impares. Así:

La “Serie de Fourier de Funciones Coseno” de una función g integrable en $(0, +L)$ es la serie de Fourier de la función correspondiente a su expansión par en $(-L, +L)$, esto es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L}, \quad (38a)$$

donde el coeficiente a_n se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(\hat{x}) \cos \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} d\hat{x}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (38b)$$

La “Serie de Fourier de Funciones Seno” de una función g integrable en $(0, +L)$ es la serie de Fourier de la función correspondiente a su expansión impar en $(-L, +L)$, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L}, \quad (39a)$$

donde el coeficiente b_n se obtiene:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(\hat{x}) \sin \frac{n\pi(\hat{x} - \alpha)}{L} d\hat{x}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (39b)$$

5. FENÓMENO DE GIBBS

Las Series de Fourier no pueden ser empleadas en general para aproximar una función en la práctica, dado que siempre deberemos trabajar con un número finito de términos de la serie. La cuestión que se plantea entonces es cómo de bien se aproxima una suma parcial de una serie de Fourier a la función a la cual converge. Este aspecto fue puesto de manifiesto por primera vez en 1898 por A.A. Michelson y S.W. Stratton de la Universidad de Chicago que constataron que las aproximaciones de las series de Fourier no eran demasiado buenas cerca de los

puntos de discontinuidad de salto de la función. En estos puntos observaron la aparición de oscilaciones en las aproximaciones en serie de Fourier. En principio, se debería esperar que estas oscilaciones se amortiguaran a medida que se toma un mayor número de términos de la serie para construir la aproximación. Sin embargo, esto no es cierto, y las oscilaciones aumentan cuando el número de términos tiende a infinito. A este comportamiento inesperado de las series de Fourier se denomina “fenómeno de Gibbs”, en honor al profesor J.W. Gibbs de la Universidad de Yale que dio una primera explicación a este fenómeno en 1899[†].

Para demostrar la aparición de este fenómeno de Gibbs consideremos la siguiente función continua a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ 2\pi, & \text{si } 0 \leq x < +\pi; \end{cases} \quad (40)$$

Según el teorema de convergencia de las series de Fourier —expresión (30)—, la serie de la función f converge a π en el origen, y a $f(x)$ en todos los demás puntos de $(-\pi, +\pi)$. Para estudiar el comportamiento de la suma parcial de la serie de Fourier de esta función cerca del punto de discontinuidad, tomemos de nuevo la expresión (23) particularizada para la función (40):

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(s-x) ds \\ &= \int_0^{\pi} D_N(s-x) ds = \int_{-x}^{\pi-x} D_N(z) dz \\ &= \int_{-x}^0 D_N(z) dz + \int_0^{\pi} D_N(z) dz + \int_{\pi}^{\pi-x} D_N(z) dz \end{aligned} \quad (41)$$

y si tenemos en cuenta que el núcleo de Dirichlet es una función par (por tanto, $D_N(-z) = D_N(z)$) y verifica (24), se obtiene

$$s_N(x) = \int_0^x D_N(z) dz + \pi - \int_{\pi-x}^{\pi} D_N(z) dz. \quad (42)$$

Dado que estamos analizando lo que sucede para valores de x próximos al origen (punto de discontinuidad de f), en la tercera de las integrales de (42), el intervalo $(\pi - x, \pi)$ no contiene al origen, por lo que

$$\int_{\pi-x}^{\pi} D_N(z) dz = \int_{\pi-x}^{\pi} \frac{1}{\sin(z/2)} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) z dz. \quad (43)$$

[†] En 1848, el matemático inglés H. Wilbraham había ya constatado este fenómeno, aunque sus trabajos se conocieron con posterioridad a los de Gibbs.

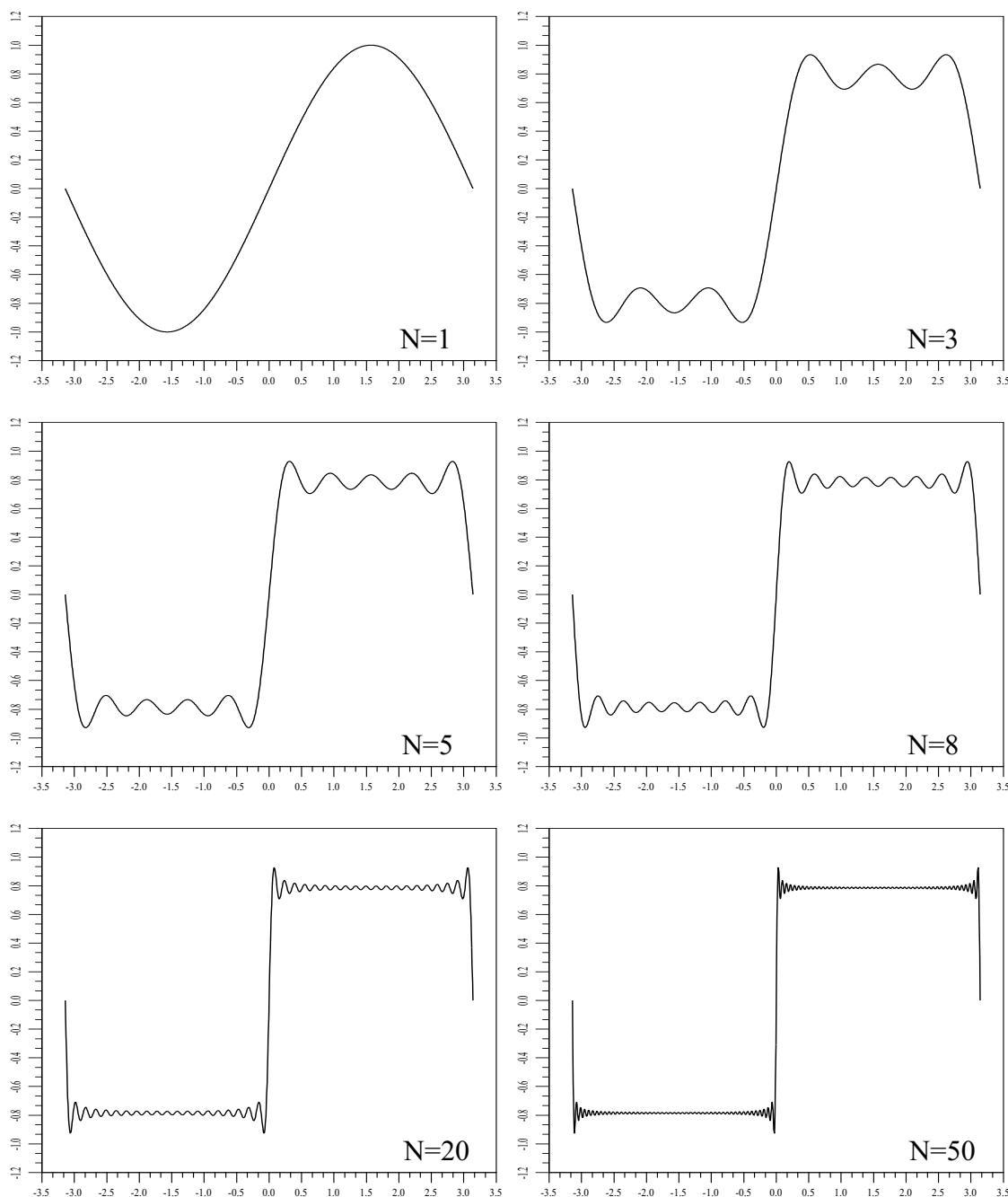


Fig. 5. Fenómeno de Gibbs en el desarrollo en serie de Fourier de la función “onda cuadrada” con distinto número de términos (N) de la serie.

Dado que $\frac{1}{\sin(z/2)}$ es integrable en $(\pi - x, \pi)$, cuando N tiende a infinito la tercera integral de (42) es nula en virtud del teorema de Riemann-Lebesgue —expresión (13)—, y por tanto para valores de x próximos a cero y valores de N grandes la

suma parcial $s_N(x)$ tiende a

$$s_N(x) \approx \int_0^x D_N(z) dz + \pi. \quad (44)$$

La suma parcial $s_N(x)$ se puede tratar de aproximar analíticamente evaluando el término integral del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^x D_N(z) dz &= \int_0^x \frac{\sin(N + 1/2)z}{\sin(z/2)} dz \\ &= 2 \int_0^x \frac{\sin(N + 1/2)z}{z} dz + \int_0^x \frac{z - 2 \sin(z/2)}{z \sin(z/2)} \sin(N + 1/2)z dz \end{aligned} \quad (45)$$

Si x es suficientemente pequeño, la función $\frac{z - 2 \sin(z/2)}{z \sin(z/2)}$ es continua en $(0, x)$, y, por aplicación de la regla de L'Hôpital, se demuestra que tiende a cero cuando $z \rightarrow 0$. En consecuencia, se trata de una función integrable en $(0, x)$, por lo que, cuando N tiende a infinito, la integral del producto de esta función por $\sin(N + 1/2)z$ es nula (teorema de Riemann-Lebesgue).

Por consiguiente, para valores de x pequeños y de N grandes, la suma parcial de la serie de Fourier se aproxima a

$$s_N(x) \approx \pi + 2 \int_0^{(N+1/2)x} \frac{\sin v}{v} dv. \quad (46)$$

Esta función $s_N(x)$ presenta un comportamiento tal como el que se muestra en la figura 5, produciéndose efectivamente oscilaciones alrededor del punto de discontinuidad de salto, de modo que la función resultante presenta un número infinito de máximos y mínimos relativos. El máximo y mínimo absolutos se producen en los puntos de x más próximos al origen. Concretamente, la derivada de $s_N(x)$ es:

$$\begin{aligned} s'_N(x) &= 2 \frac{\sin(N + 1/2)x}{x}, & x \neq 0; \\ s'_N(0) &= 2N + 1; \end{aligned} \quad (47)$$

por lo que, los extremos relativos de $s_N(x)$ corresponden a los puntos $\frac{k\pi}{N + 1/2}$, siendo máximos relativos para $k = \dots, -6, -4, -2, +1, +3, +5, \dots$, y mínimos relativos para $k = \dots, -5, -3, -1, +2, +4, +6, \dots$

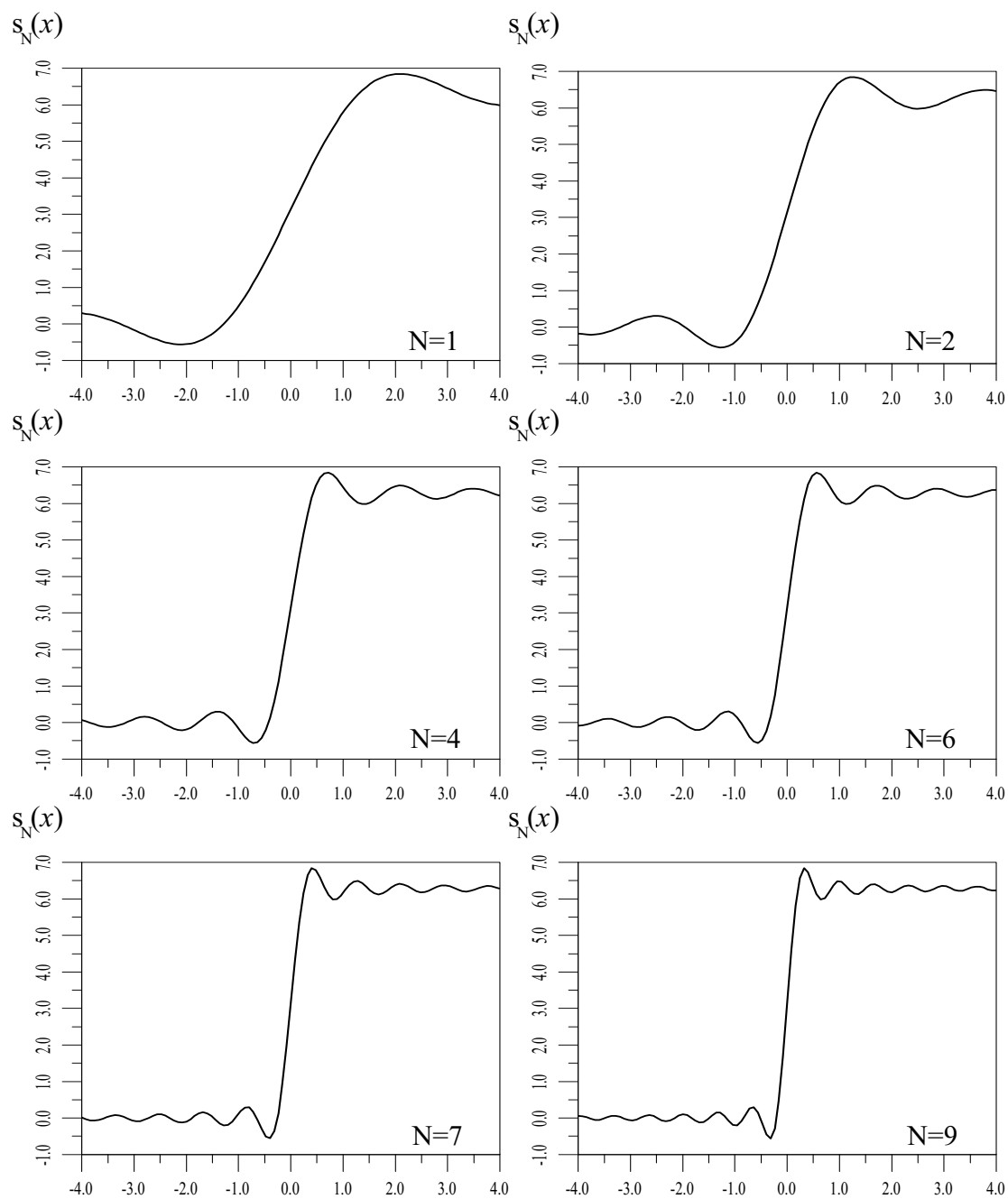


Fig. 6. Gráficas de la aproximación a la suma parcial $s_N(x)$ de una serie de Fourier —expresión (46)— para distintos valores de N .

El punto correspondiente a $k = 1$ es el máximo absoluto ($x_{max} = \frac{\pi}{N + 1/2}$) y su valor en la función se aproxima a

$$s_N(x_{max}) \approx \pi + 2 \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv \approx 1.09 (2\pi), \quad (48)$$

mientras que el valor de la función en ese punto debería ser 2π . Realizando el mismo cálculo para el mínimo absoluto ($x_{min} = \frac{-\pi}{N + 1/2}$), el valor se aproxima a $-0.09(2\pi)$. Ello significa que cerca de la discontinuidad de salto, al tomar un número finito de términos, el error cometido debido a estas oscilaciones se sitúa alrededor de un 9% del valor de la función en la discontinuidad, siendo independiente del número N de términos que se consideren. Este efecto es el que se conoce como “fenómeno de Gibbs” para la función f dada en (40).

Por supuesto, la aparición de este fenómeno en un ejemplo o en una colección de ellos no implica necesariamente que se deba de producir siempre en un caso general. No obstante, en 1906, se demostró que la suma parcial de la serie de Fourier de una función arbitraria presenta siempre oscilaciones de alrededor de un 9% en los puntos con discontinuidades de salto. Este “defecto” intrínseco en la convergencia de las series de Fourier se puede subsanar definiendo nuevas sumas parciales como las medias aritméticas de un conjunto de sumas parciales de una serie de Fourier (lo que se conocen como “sumas de Féjer”).[†]

6. INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER

En el apartado 1 se han deducido las expresiones de los coeficientes de las series de Fourier asumiendo que es posible integrar las series de Fourier término a término. Seguidamente presentaremos un resultado debido a Lebesgue en 1906 que asegura que la serie de Fourier de una función integrable puede siempre ser integrada término a término, incluso si la serie misma diverge. Así,

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos en $(-\pi, +\pi)$ cuya serie de Fourier en dicho intervalo es

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Si x y α son dos puntos de $[-\pi, +\pi]$, entonces

$$\int_{\alpha}^x f(z) dz = \frac{1}{2}a_0(x - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x (a_n \cos nz + b_n \sin nz) dz, \quad (49)$$

tanto si la serie de Fourier es convergente como divergente.

[†] El estudio de estas sumas puede encontrarse en detalle en “*Fourier Analysis and Boundary Value Problems*”, E.A. García-Velasco, Academic Press (1995).

▷Para la demostración de este teorema, es suficiente probar que se verifica para $\alpha = 0$, ya que el caso general se puede analizar teniendo en cuenta que

$$\int_{\alpha}^x f(z)dz = \int_0^x f(z)dz - \int_0^{\alpha} f(z)dz,$$

y el hecho de que dos series convergentes de funciones se pueden restar término a término. En consecuencia basta probar que la serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, +\pi)$ de la función primitiva $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en $[-\pi, +\pi]$,

$$F(x) = \int_0^x f(z)dz - \frac{1}{2} a_0 x \tag{50}$$

es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nz + b_n \sin nz) dz \tag{51}$$

En primer lugar, observemos que la extensión de la función F en toda la recta real como una función periódica de periodo 2π es continua en \mathbb{R} dado que F es claramente una función continua en $[-\pi, +\pi]$ y porque, de la definición de a_0 , se verifica

$$F(\pi) = \int_0^{\pi} f(z)dz - \frac{\pi a_0}{2} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^0 f(z)dz - \frac{\pi a_0}{2} = \frac{\pi a_0}{2} + \int_0^{-\pi} f(z)dz = F(-\pi).$$

Asímismo se cumple que $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ en todos los puntos x en los que f es continua; por tanto, F' es una función continua a trozos en $(-\pi, +\pi)$ y satisface las condiciones del teorema de Dirichlet y Riemann de convergencia de series de Fourier. En consecuencia, $F(x)$ es igual a la suma de su serie de Fourier en $(-\pi, +\pi)$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

Para valores de $n > 0$, los coeficientes de Fourier de esta expresión se pueden obtener integrando por partes. Así:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nxdx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(F(\pi) \sin(n\pi) - F(-\pi) \sin(-n\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \sin nxdx \right) \\ &= \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sin nxdx \\ &= \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \\ &= -\frac{b_n}{n} \end{aligned}$$

De modo análogo se demuestra que $B_n = \frac{a_n}{n}$. En consecuencia, la expresión (52) resulta ser:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

El coeficiente A_0 se obtiene particularizando para $x = 0$ en (53), teniendo en cuenta que $F(0) = 0$ por (50), por lo que:

$$0 = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

En consecuencia, sustituyendo este resultado en (53):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{(1 - \cos nx)}{n} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

que obviamente es:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nz + b_n \sin nz) dz, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

con lo que queda demostrado que la integral de una serie de Fourier es la suma de las integrales de cada término.◁