ECUACIÓN DE ONDAS LINEAL DE SEGUNDO ORDEN 1D

El problema de valores iniciales para la ecuación de ondas lineal de segundo orden 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty; \quad t > 0; \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \tag{1}$$

siendo f, g funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede plantear en términos de dos problemas de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = v; \qquad u(x,0) = f(x) \tag{2.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \qquad v(x,0) = g(x) - c\,f'(x) \tag{2.b}$$

El problema dado en (2.b) corresponde a la ecuación unidireccional de ondas homogénea cuya solución por el método de características es inmediata y viene dada por

$$v(x,t) = \Big[g(z) - c\,f'(z) \Big]_{z=x-ct} \tag{3}$$

Sustituyendo la función v en (2.a) obtenemos la ecuación unidireccional no-homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = \Big[g(z) - c\,f'(z) \Big]_{z=x-ct}; \qquad u(x,0) = f(x) \tag{4}$$

que se puede resolver mediante el método de características del modo siguiente: Si la coordenada s es tal que $\left\{ \begin{array}{c} x \equiv x(s) \\ t \equiv t(s) \end{array} \right\}$, entonces $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dt}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}$. Identificando con la ecuación en derivadas parciales de (4) y parametrizando la condición inicial, tenemos

$$\frac{dt}{ds} = 1; \quad t = 0|_{s=0} \tag{5.a}$$

$$\frac{dx}{ds} = -c; \quad x = \tau|_{s=0} \tag{5.b}$$

$$\frac{du}{ds} = \Big[g(z) - c\,f'(z) \Big]_{z=x(s)-ct(s)}; \quad u = f(\tau)|_{s=0} \tag{5.c}$$

Las ecuaciones (5.a) y (5.b) proporcionan las *características*:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = s \\ x = -cs + \tau \end{array} \right. \tag{6}$$

que sustituidas en el problema (5.c) conduce a

$$\frac{du}{ds} = \Big[g(z) - c\,f'(z) \Big]_{z=\tau-2cs}; \quad u = f(\tau)|_{s=0} \tag{7}$$

La solución general de la EDO anterior es

$$u = K + \int \Big[g(z) - c\,f'(z) \Big]_{z=\tau-2cs} ds \tag{8}$$

siendo K una constante de integración, esto es, independiente de la variable que se integra (s). Esta solución general también se puede escribir de modo que verifique la condición inicial $u = f(\tau)$ cuando $s = 0$

$$u = f(\tau) + \int_{\alpha=0}^{\alpha=s} \Big[g(z) - c\, f'(z) \Big]_{z=\tau-2c\alpha} d\alpha \tag{9}$$

Dado que $z = \tau - 2c\alpha$, si efectuamos este cambio de variable, se obtiene $d\alpha = -\frac{dz}{2c}$ y además

$$u = f(\tau) - \frac{1}{2c} \int_{z=\tau}^{z=\tau-2cs} \Big[g(z) - c\, f'(z) \Big] dz \tag{10}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u &= f(\tau) + \frac{1}{2} \int_{z=\tau}^{z=\tau-2cs} f'(z)dz - \frac{1}{2c} \int_{z=\tau}^{z=\tau-2cs} g(z)dz \\ &= f(\tau) + \frac{1}{2} f(\tau - 2cs) - \frac{1}{2} f(\tau) - \frac{1}{2c} \int_{z=\tau}^{z=\tau-2cs} g(z)dz \qquad (11) \\ &= \frac{1}{2} f(\tau - 2cs) + \frac{1}{2} f(\tau) - \frac{1}{2c} \int_{z=\tau}^{z=\tau-2cs} g(z)dz \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta las características dadas por (6): $\left\{ \begin{array}{c} s = t \\ \tau = x + ct \end{array} \right\}$, la solución final es

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct) - \frac{1}{2c} \int_{z=x+ct}^{z=x-ct} g(z)dz} \tag{12}$$

Nótese que si en la expresión anterior se denota $\widetilde{g}$ a la primitiva de la función g, esto es,

$$\widetilde{g}(z) = \int g(z)dz$$

entonces la solución se puede identificar claramente como la superposición de DOS ondas unidireccionales (*solución de D'Alembert*):

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2c} \widetilde{g}(x + ct)}_{\text{onda hacia } X^-} + \underbrace{\frac{1}{2} f(x - ct) - \frac{1}{2c} \widetilde{g}(x - ct)}_{\text{onda hacia } X^+} \tag{13}$$