CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Al igual que sucede con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es usual tratar de establecer clasificaciones en las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Ello tiene como finalidad estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales atendiendo a la clase general a la que pertenecen.

En el caso de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de segundo orden lineales en $\mathbb{R}^2$ esta clasificación se lleva a cabo adoptando la terminología de la clasificación de las ecuaciones cuadráticas en Geometría Analítica. A continuación se presenta esta clasificación.

Consideraremos para ello la ecuación en derivadas parciales de segundo orden lineal siguiente:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial yx} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = G(x,y) \quad (1)$$

siendo A, B, C, D, E, F, G funciones reales de clase $\mathcal{C}^{(2)}$, y $u \equiv u(x,y)$ la función incógnita de la ecuación diferencial también real y de clase $\mathcal{C}^{(2)}$.

Los tres primeros sumandos de la ecuación diferencial (1) se denominan la **"Parte Principal"** de la ecuación en derivadas parciales. Seguidamente se verá que según sea el término $(B(x_i,y_i))^2 - 4A(x_i,y_i)C(x_i,y_i)$ en cada punto (x_i,y_i) del dominio de solución de la ecuación diferencial, ésta se dice que es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en dicho punto del dominio. Esta clasificación se lleva a cabo a través de lo que se denomina **"Reducción a una forma canónica o estándard"** de la ecuación en derivadas parciales.

1. REDUCCIÓN A FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN LINEALES EN $\mathbb{R}^2$ CON COEFICIENTES VARIABLES

La reducción de una ecuación en derivadas parciales a una forma canónica se realiza mediante un determinado cambio en las variables independientes. Así, sean

$$\xi \equiv \xi(x,y) \quad \eta \equiv \eta(x,y) \quad (2)$$

dos funciones de clase $\mathcal{C}^{(2)}$ tales que el jacobiano de la transformación $(\xi,\eta) \to (x,y)$ y $(x,y) \to (\xi,\eta)$ sean invertibles, esto es

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Supongamos que conocemos las funciones $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ (después se verá como se obtienen). Si se aplica la regla de la cadena, se puede transformar la ecuación diferencial de partida (1) en una nueva ecuación diferencial en términos de las nuevas variables (ξ,η). Así en primer lugar, si se deriva cada término

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial yx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta\xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial yx} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial yx}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

y se sustituye en la ecuación diferencial (1), se obtiene una nueva ecuación diferencial en derivadas parciales en función de (ξ, η)

$$
\widetilde{A}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + \widetilde{B}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta\xi} + \widetilde{C}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2} + \widetilde{D}(\xi,\eta)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi} + \widetilde{E}(\xi,\eta)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} + \widetilde{F}(\xi,\eta)\widetilde{u} = \widetilde{G}(\xi,\eta) \tag{5}
$$

siendo $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}, \widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ las funciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A} &\equiv A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\
\widetilde{B} &\equiv 2A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\widetilde{C} &\equiv A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \\
\widetilde{D} &\equiv A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \xi}{\partial yx} + C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \xi}{\partial x} + E\frac{\partial \xi}{\partial y} \\
\widetilde{E} &\equiv A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \eta}{\partial yx} + C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial \eta}{\partial x} + E\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\widetilde{F} &\equiv F \\
\widetilde{G} &\equiv G
\end{aligned}
\tag{6}
$$

y $\widetilde{u}$ es la nueva función incógnita de la ecuación diferencial en términos de (ξ, η).

Aunque en las expresiones (6) no se indica explícitamente, debe entenderse que las funciones $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}, \widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ dependen de las nuevas variables (ξ, η), en tanto que las funciones A, B, C, D, E, F, G dependen de las variables originales (x, y).

El objetivo de esta "reducción" de la ecuación en derivadas parciales en términos de unas nuevas variables es conseguir una nueva ecuación en derivadas parciales más sencilla imponiendo que determinados términos de esta ecuación sean nulos. Seguidamente se presenta la metodología que establece los cambios de variable de la forma (2) que permiten obtener dicha ecuación diferencial.

Para esta "reducción" es suficiente con estudiar la parte principal de la ecuación en derivadas parciales (5), que en lo sucesivo la consideraremos en la forma:

$$
\widetilde{A}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + \widetilde{B}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta\xi} + \widetilde{C}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2} = \widetilde{H}\left(\xi, \eta, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\right) \tag{7}
$$

1.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Características

Sean las funciones $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ no nulas en el dominio de solución de la ecuación diferencial. Podemos preguntarnos, **¿existen cambios de variable de la forma (2) que permitan que tras realizar la transformación de (1) a (5), la ecuación diferencial resultante tenga los coeficientes $\widetilde{A}(\xi,\eta)$ y $\widetilde{C}(\xi,\eta)$ simultáneamente nulos?**

Si se impone que $\widetilde{A}$ y $\widetilde{C}$ sean nulos, ello implica que

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &\equiv A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0 \\ \widetilde{C} &\equiv A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Es decir, básicamente se trata de hallar dos soluciones distintas a la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{9}$$

donde $z \equiv z(x,y)$ denota indistintamente a $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$.

Esta igualdad a su vez se puede escribir, dividiendo por $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, como

$$A\left(\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}\right)^2 + B\left(\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}\right) + C = 0 \tag{10}$$

siempre que $z(x,y)$ sea tal que $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$.

Obtengamos ahora las trayectorias $y \equiv y(x)$ a lo largo de las cuales la función $z \equiv z(x,y)$ sea una constante. Si esto es así, entonces su diferencial es nula, es decir,

$$dz = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0 \tag{11}$$

esto es,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}. \tag{12}$$

Si ahora se sustituye (12) en la igualdad (10), se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden y segundo grado:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \tag{13}$$

cuyas raíces son las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} y'(x) &= \frac{B(x,y) + \sqrt{(B(x,y))^2 - 4A(x,y)C(x,y)}}{2A(x,y)} \\ \\ y'(x) &= \frac{B(x,y) - \sqrt{(B(x,y))^2 - 4A(x,y)C(x,y)}}{2A(x,y)} \end{aligned}\right.} \tag{14}$$

Estas ecuaciones se denominan **"Ecuaciones Diferenciales Características"** y sus soluciones (cuando ambas existen y son distintas) son las familias de curvas en el plano XY a lo largo de las cuales $z \equiv z(x, y)$ es una constante, esto es, $\xi \equiv \xi(x, y)$ y $\eta \equiv \eta(x, y)$ son constantes.

En consecuencia, dado que las soluciones de las ecuaciones diferenciales (14) las podemos escribir como

$$\begin{cases} F_1(x, y(x)) = Constante_1 \\ \\ F_2(x, y(x)) = Constante_2 \end{cases} \tag{15}$$

siendo $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ las curvas integrales de cada una de las ecuaciones diferenciales (14), y dado que (15) son las curvas $y \equiv y(x)$ a lo largo de las cuales $\xi \equiv \xi(x, y)$ y $\eta \equiv \eta(x, y)$ son constantes, entonces ξ y η son

$$\boxed{\begin{cases} \xi \equiv \xi(x, y) = F_1(x, y(x)) \\ \\ \eta \equiv \eta(x, y) = F_2(x, y(x)) \end{cases}} \tag{16}$$

Estas curvas se denominan **"Curvas Características"** de la ecuación diferencial en derivadas parciales (1).

1.2 Ecuaciones Hiperbólicas

Las ecuaciones diferenciales características (14) proporcionan DOS familias de curvas características (16) distintas siempre que el discriminante $(B(x, y))^2 - 4A(x, y)C(x, y)$ sea no nulo.

Si $(B(x, y))^2 - 4A(x, y)C(x, y)$ es **positivo**, entonces existen dos familias de curvas $\xi \equiv \xi(x, y)$ y $\eta \equiv \eta(x, y)$ dadas por (16) tales que los coeficientes $\widetilde{A}$ y $\widetilde{C}$ de la ecuación diferencial (7) en el dominio (ξ, η) son nulos. Por consiguiente la nueva ecuación en derivadas parciales que queda tras realizar la transformación es:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta \xi} = \widetilde{H}_1} \tag{17}$$

que se denomina **"Primera forma canónica de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas"**.

El término $\widetilde{H}_1$ de (17) viene dado por

$$\widetilde{H}_1 = \frac{\widetilde{H}\left(\xi, \eta, \widetilde{u}, \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}, \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\right)}{\widetilde{B}(\xi, \eta)} \tag{18}$$

Demostrar que si existen las curvas características $\xi \equiv \xi(x, y)$ y $\eta \equiv \eta(x, y)$ y por tanto $\widetilde{A}$ y $\widetilde{C}$ de la ecuación diferencial (7) son nulos, el término $\widetilde{B}(\xi, \eta)$ siempre es no nulo en (ξ, η).

Si una vez obtenidas las curvas $\xi \equiv \xi(x,y)$ y $\eta \equiv \eta(x,y)$ se realiza un nuevo cambio de variables, concretamente

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \tag{19}$$

entonces la ecuación (18) se transforma en

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \beta^2} = \widetilde{H}_2} \tag{20}$$

que se denomina **"Segunda forma canónica de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas"**.

Demostrar que el cambio (19) permite obtener efectivamente la ecuación diferencial (20) y dar la expresión explícita de $\widetilde{H}_2$.

1.3 Ecuaciones Parabólicas

Si el término $(B(x,y))^2 - 4A(x,y)C(x,y)$ de (14) es **nulo**, entonces existe una única familia de curvas características y solamente uno de los dos coeficientes $\widetilde{A}$ ó $\widetilde{C}$ de la ecuación diferencial (7) en el dominio (ξ,η) es nulo. Si denominamos $\xi \equiv \xi(x,y)$ a las curvas características obtenidas, entonces $\widetilde{A}$ es nulo.

El segundo cambio de variable $\eta \equiv \eta(x,y)$ necesario para realizar la transformación de (1) a (5) se elige arbitrariamente, pero tal que las condiciones (3) se satisfagan (normalmente se elige una función sencilla, por ejemplo $\eta(x,y) = y$, que sea funcionalmente independiente de las curvas características obtenidas $\xi \equiv \xi(x,y)$). Dado que el cambio de variable $\eta \equiv \eta(x,y)$ se elige arbitrariamente, el coeficiente $\widetilde{C}$ de (7) no será nulo.

No obstante, sí es nulo el coeficiente $\widetilde{B}$ de (7) en virtud de lo siguiente: Dado que $\widetilde{A} = 0$ y se satisface $(B(x,y))^2 = 4A(x,y)C(x,y)$, entonces

$$\widetilde{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \equiv \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{21}$$

Por otra parte, si se tiene en cuenta que $(B(x,y))^2 = 4A(x,y)C(x,y)$ en $\widetilde{B}$ de (6), resulta

$$\widetilde{B} \equiv 2A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2\left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{22}$$

que es nulo dado que el binomio $\left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0$ por (21).

En consecuencia la ecuación en derivadas parciales (7) queda de la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2} = \widetilde{H}_2} \tag{23}$$

que se denomina **“Forma canónica de las ecuaciones diferenciales parabólicas”**.

El término $\widetilde{H}_2$ de (23) viene dado por

$$\widetilde{H}_2 = \frac{\widetilde{H}\left(\xi, \eta, \widetilde{u}, \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}, \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\right)}{\widetilde{C}(\xi, \eta)} \tag{24}$$

Demostrar que si se conocen las curvas características $\xi \equiv \xi(x, y)$ y se elige arbitrariamente $\eta \equiv \eta(x, y)$ y por tanto $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ de la ecuación diferencial (7) son nulos, el término $\widetilde{C}(\xi, \eta)$ siempre es no nulo en (ξ, η).

1.4 Ecuaciones Elípticas

Si $(B(x, y))^2 - 4A(x, y)C(x, y)$ es **negativo**, entonces existen dos familias de curvas $\xi \equiv \xi(x, y)$ y $\eta \equiv \eta(x, y)$ dadas por (16) que son funciones complejas conjugadas tales que los coeficientes $\widetilde{A}$ y $\widetilde{C}$ de la ecuación diferencial (7) en el dominio (ξ, η) son nulos.

Dado que las funciones que intervienen en la ecuación en derivadas parciales (1) son todas reales, se puede evitar trabajar con curvas características complejas (y evitar también tener que trabajar con una ecuación diferencial (7) que contiene términos complejos) si se efectúa el cambio de variables:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\[2ex] \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2i} \end{cases} \tag{25}$$

Ahora las nuevas funciones $\alpha = \alpha(x, y)$ y $\beta = \beta(x, y)$ son reales.

Con este cambio, la ecuación diferencial (7) se transforma en una nueva ecuación en derivadas parciales de la forma

$$\widehat{A}(\alpha, \beta)\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \alpha^2} + \widehat{B}(\alpha, \beta)\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \beta \alpha} + \widehat{C}(\alpha, \beta)\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \beta^2} = \widehat{H}\left(\alpha, \beta, \widehat{u}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \beta}\right) \tag{26}$$

donde $\widehat{u}$ es la nueva función incógnita en términos de (α, β) y los coeficientes $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son del mismo tipo que los coeficientes $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ dados por (6), sólo que cambiando ξ por α y η por β. *(Demostrarlo).*

Así mismo los coeficientes $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ y $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ verifican la siguiente relación *(demostrarlo)*:

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= (\widehat{A} - \widehat{C}) + i\widehat{B} \\ \widetilde{C} &= (\widehat{A} - \widehat{C}) - i\widehat{B} \end{aligned} \tag{27}$$

y dado que los coeficientes $\widetilde{A}$ y $\widetilde{C}$ son nulos, entonces (27) implica que

$$\begin{aligned} (\widehat{A} - \widehat{C}) &= 0 \\ \widehat{B} &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

por lo que se concluye que la ecuación diferencial transformada por el doble cambio de variables (2) y (25) dada por (26) queda de la forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \beta^2} = \widehat{H}_3} \tag{29}$$

que se denomina **"Forma canónica de las ecuaciones diferenciales elípticas"**.

El término $\widehat{H}_3$ de (29) viene dado por

$$\widehat{H}_3 = \frac{\widehat{H}\left(\alpha, \beta, \widehat{u}, \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial \beta}\right)}{\widehat{A}(\alpha, \beta)} \tag{30}$$

2. REDUCCIÓN A FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN LINEALES EN $\mathbb{R}^2$ CON COEFICIENTES CONSTANTES EN LA PARTE PRINCIPAL

En el caso en que la ecuación en derivadas parciales (1) tenga los coeficientes de su parte principal constantes, esto es

$$A(x,y) = a, \quad B(x,y) = b, \quad C(x,y) = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{31}$$

entonces la reducción a formas canónicas es más sencilla, dado que las ecuaciones diferenciales características (14) son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en varias separadas con solución inmediata: dos familias de rectas . Así, si $b^2 - 4ac \neq 0$ estas **"Rectas características"** son

$$\boxed{\begin{cases} \xi \equiv \xi(x,y) = y - \lambda_1 x; \quad \lambda_1 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] \eta \equiv \eta(x,y) = y - \lambda_2 x; \quad \lambda_2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}} \tag{32}$$

Conviene destacar que a diferencia del caso general, ahora la ecuación diferencial en derivadas parciales será hiperbólica, parabólica o elíptica en todo el dominio de solución de la ecuación diferencial, y este caracter no variará en puntos distintos del dominio.

(Obtener las expresiones de las formas canónicas en los tres casos según $(b^2 - 4ac)$ *sea positivo, nulo o negativo.)*

3. CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A FORMA CANÓNICA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN LINEALES EN $\mathbb{R}^n$ CON COEFICIENTES CONSTANTES EN LA PARTE PRINCIPAL

En el caso de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales con más de dos variables independientes con coeficientes variables en la parte principal no es usualmente posible reducir la ecuación a una única forma canónica. Con frecuencia el problema se aborda analizando el carácter de la ecuación diferencial de modo puntual de modo que entonces se trata de clasificar una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el conjunto de n variables independientes y considérese la ecuación diferencial

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f\,u = g \tag{33}$$

donde todos los coeficientes de la ecuación diferencial (a_{ij}, $\forall i, j$; b_i, $\forall i$; f y g) son constantes.

Si se efectúa un cambio de escala, esto es, un conjunto de n cambios de variables (de las variables originales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a unas nuevas variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) de la forma:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j, \qquad i = 1, n, \tag{34}$$

siempre se pueden hallar los coeficientes μ_{ij} que permiten transformar la ecuación diferencial (33) a una más sencilla de forma general

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_i} + f\,\widetilde{u} = g \tag{35}$$

en la que los coeficientes $\widetilde{a}_i$ son $+1$,-1 ó 0. Nótese la ausencia de derivadas parciales cruzadas en esta nueva ecuación diferencial.

La clasificación del tipo de ecuación diferencial de que se trate se lleva a cabo según sean los coeficientes $\widetilde{a}_i$ obtenidos en (35). Las posibilidades que tienen más interés por el tipo de problemas que se presentan en la física y la ingeniería son las siguientes:

- Si **TODOS** los n coeficientes $\widetilde{a}_i$ son no nulos y tienen el mismo signo, se dice que la ecuación es **elíptica** (por ejemplo, las ecuaciones de Laplace o Poisson).
- Si **TODOS** los n coeficientes $\widetilde{a}_i$ son no nulos, y todos tienen el mismo signo **EXCEPTO** uno, se dice que la ecuación es **hiperbólica** (por ejemplo, la ecuación de ondas).
- Si un coeficiente $\widetilde{a}_i$ es nulo (por ejemplo, el $\widetilde{a}_k$), **TODOS** los restantes coeficientes $\widetilde{a}_i$ son no nulos y tienen el mismo signo y el coeficiente $\widetilde{b}_k$ es no nulo, se dice que la ecuación es **parabólica** (por ejemplo, la ecuación del calor).