## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL

$$\boxed{x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0} \qquad (1)$$

**Funciones de Bessel de Primera Clase de Orden $\nu$ y $-\nu$ ($\nu \in \mathbb{R}$)**

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ 2^{2k+\nu}\ \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+\nu} \ ; \qquad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ 2^{2k-\nu}\ \Gamma(k-\nu+1)} x^{2k-\nu} \qquad (2)$$

Si $\nu \neq 0, 1, 2, ...$ las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En caso contrario se verifica que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, ...$

**Funciones de Bessel de Primera Clase de Orden 0 y 1**

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\, 4^2} - \frac{x^6}{2^2\, 4^2\, 6^2} + ... \ ; \qquad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\, 4} + \frac{x^5}{2^2\, 4^2\, 6} - \frac{x^7}{2^2\, 4^2\, 6^2\, 8} + ... \qquad (3)$$

Obsérvese que se verifica $J_0'(x) = -J_1(x)$.

**Funciones de Bessel de Segunda Clase de Orden $\nu$**

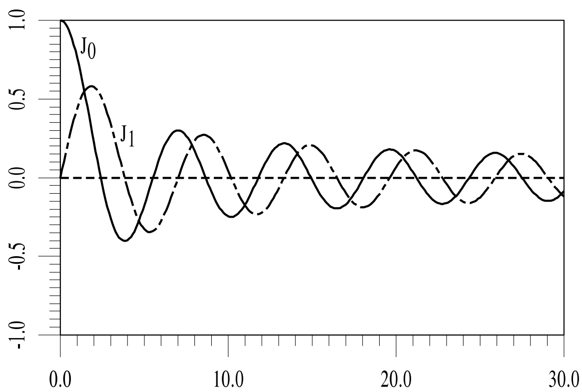
$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \ , \qquad \nu \neq 0, 1, 2, ... \qquad (4)$$

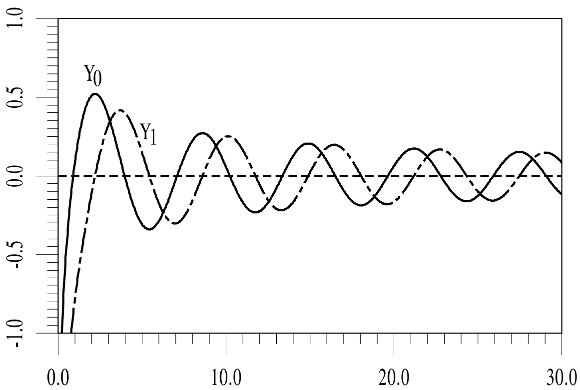
En los casos en los que $n = 0, 1, 2, ...$ las funciones de segunda clase vienen dadas por:

$$Y_n(x) = \frac{2\, J_n(x)}{\pi} \left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ \frac{\Phi(k) + \Phi(n+k)}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (5)$$

siendo $\gamma = 0.5772156....$ la constante de Euler y $\Phi(p) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}$, donde $\Phi(0) = 0$.

Si $\nu \neq 0, 1, 2, ...$ las funciones $Y_\nu(x)$ y $Y_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En caso contrario se verifica que $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, ...$




**Solución General de la Ecuación Diferencial de Bessel (1)**

$$y(x) \ = \ C_1\, J_\nu(x) \ + \ C_2\, Y_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R} \qquad (6)$$

$$y(x) \ = \ C_1\, J_\nu(x) \ + \ C_2\, J_{-\nu}(x), \qquad \nu \neq 0, 1, 2, ... \qquad (7)$$

**Fórmulas y Resultados Interesantes que involucran Funciones de Bessel**

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\, J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \quad ; \qquad J_\nu'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right) \qquad (8)$$

$$x\, J_\nu'(x) = x\, J_{\nu-1}(x) - \nu\, J_\nu(x) \quad ; \qquad x\, J_\nu'(x) = \nu\, J_\nu(x) - x\, J_{\nu+1}(x) \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu\, J_\nu(x)\right) = x^\nu\, J_{\nu-1}(x) \quad ; \qquad \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}\, J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu}\, J_{\nu+1}(x) \qquad (10)$$

Las funciones $Y_\nu(x)$ satisfacen las mismas relaciones (8), (9) y (10).

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin x \quad ; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \cos x \qquad (11)$$

Las funciones $Y_{1/2}(x)$ e $Y_{-1/2}(x)$ se obtienen a partir de (5) y (11).

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL MODIFICADA

$$\boxed{x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0} \tag{12}$$

**Funciones Modificadas de Bessel de Primera Clase de Orden $\nu$ y $-\nu$ ($\nu \in \mathbb{R}$)**

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\ 2^{2k+\nu}\ \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+\nu} \ ; \qquad I_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\ 2^{2k-\nu}\ \Gamma(k-\nu+1)} x^{2k-\nu} \tag{13}$$

Si $\nu \neq 0, 1, 2, ...$ las funciones $I_\nu(x)$ y $I_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En caso contrario se verifica que $I_{-n}(x) = I_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, ...$

**Funciones Modificadas de Bessel de Primera Clase de Orden 0 y 1**

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\,4^2} + \frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2} + ... \ ; \qquad I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2\,4} + \frac{x^5}{2^2\,4^2\,6} + \frac{x^7}{2^2\,4^2\,6^2\,8} + ... \tag{14}$$

Obsérvese que se verifica $I_0'(x) = I_1(x)$.

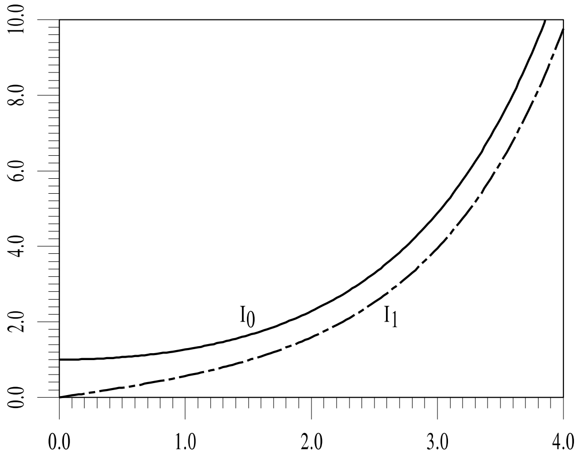
**Funciones Modificadas de Bessel de Segunda Clase de Orden $\nu$**

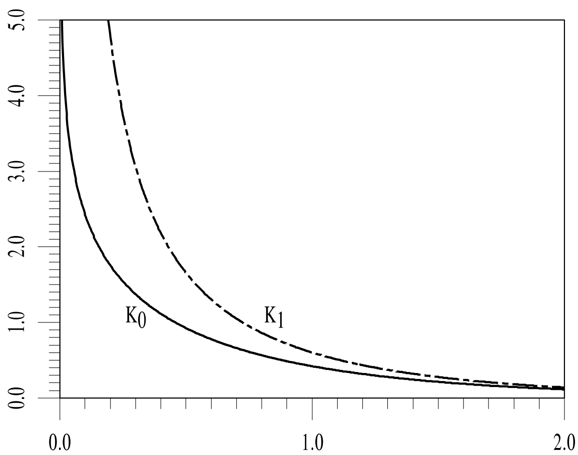
$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)} \left(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right) \ , \qquad \nu \neq 0, 1, 2, ... \tag{15}$$

En los casos en los que $n = 0, 1, 2, ...$ las funciones modificadas de segunda clase son:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= (-1)^{n+1}\, I_n(x) \left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\,(n-k-1)!\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi(k)+\Phi(n+k)}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \ ; \ \gamma = 0.5772156... \ ; \qquad \Phi(p) = \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j} \ , \ \Phi(0) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Si $\nu \neq 0, 1, 2, ...$ las funciones $K_\nu(x)$ y $K_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En caso contrario se verifica que $K_{-n}(x) = K_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, ...$




**Solución General de la Ecuación Diferencial Modificada de Bessel (12)**

$$y(x) \ = \ C_1\, I_\nu(x) \ + \ C_2\, K_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R} \tag{17}$$

$$y(x) \ = \ C_1\, I_\nu(x) \ + \ C_2\, I_{-\nu}(x), \qquad \nu \neq 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

**Fórmulas y Resultados Interesantes que involucran Funciones Modificadas de Bessel**

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}\, J_\nu(ix) \quad ; \qquad I_{-\nu}(x) = i^{\nu}\, J_{-\nu}(ix) \tag{19}$$

$$I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}\, I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x) \quad ; \qquad I_\nu'(x) = \frac{1}{2}\left(I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)\right) \tag{20}$$

$$K_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\, K_\nu(x) + K_{\nu-1}(x) \quad ; \qquad K_\nu'(x) = \frac{1}{2}\left(K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)\right) \tag{21}$$

$$x\, I_\nu'(x) = x\, I_{\nu-1}(x) - \nu\, I_\nu(x) \quad ; \qquad x\, I_\nu'(x) = \nu\, I_\nu(x) + x\, I_{\nu+1}(x) \tag{22}$$

$$x\, K_\nu'(x) = -x\, K_{\nu-1}(x) - \nu\, K_\nu(x) \quad ; \qquad x\, K_\nu'(x) = \nu\, K_\nu(x) - x\, K_{\nu+1}(x) \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu\, I_\nu(x)\right) = x^\nu\, I_{\nu-1}(x) \quad ; \qquad \frac{d}{dx}\left(x^\nu\, K_\nu(x)\right) = -x^\nu\, K_{\nu-1}(x) \tag{24}$$

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{Sh}x \quad ; \qquad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{Ch}x \tag{25}$$

Las funciones $K_{1/2}(x)$ e $K_{-1/2}(x)$ se obtienen a partir de (15) y (25).

$$\int x\, J_0(x)\, dx = x\, J_1(x) \tag{26}$$

$$\int x^n\, J_0(x)\, dx = x^n\, J_1(x) + (n-1)x^{n-1}\, J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2}\, J_0(x)\, dx \tag{27}$$

$$\int \frac{J_0(x)}{x^n}\, dx = \frac{J_1(x)}{(n-1)^2\, x^{n-2}} - \frac{J_1(x)}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2} \int \frac{J_0(x)}{x^{n-2}}\, dx \tag{28}$$

$$\int J_1(x)\, dx = -\, J_0(x) \tag{29}$$

$$\int x^n\, J_1(x)\, dx = -x^n\, J_0(x) + n \int x^{n-1}\, J_0(x)\, dx \tag{30}$$

$$\int \frac{J_1(x)}{x^n}\, dx = -\frac{J_1(x)}{n\, x^{n-1}} - \frac{1}{n} \int \frac{J_0(x)}{x^{n-1}}\, dx \tag{31}$$

$$\int x^n\, J_{n-1}(x)\, dx = x^n\, J_n(x) \tag{32}$$

$$\int x^m\, J_n(x)\, dx = -x^m\, J_{n-1}(x) + (m+n-1) \int x^{m-1}\, J_{n-1}(x)\, dx \tag{33}$$

$$\int x\, J_n(\alpha x)\, J_n(\beta x)\, dx = \frac{x\left[\alpha\, J_n'(\alpha x)\, J_n(\beta x) - \beta\, J_n(\alpha x)\, J_n'(\beta x)\right]}{\beta^2 - \alpha^2} \tag{34}$$

$$\int x\, J_n^2(\alpha x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left[\left(J_n'(\alpha x)\right)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2\, x^2}\right)\left(J_n(\alpha x)\right)^2\right] \tag{35}$$

Las fórmulas anteriores son también válidas si se sustituye $J_n(x)$ por $Y_n(x)$.