

Ejercicios propuestos de la clase del 6/10/2026

1.− Resolver el problema de valores iniciales

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + t \frac{\partial v}{\partial t} = cv, \quad c \in \mathbb{R}; \quad v(x, 1) = f(x)$$

Solución 1. Las características son $x = x_0 e^s$, $t = e^s$ y la solución en el dominio característico $v = f(x_0) e^{cs}$. En consecuencia, la solución es

$$v(x, t) = t^c f\left(\frac{x}{t}\right)$$

2.− Resolver el problema de valores iniciales

$$t \frac{\partial v}{\partial x} - x \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad v(x, 0) = f(x)$$

Solución 2. Las características son $x = x_0 \cos(s)$, $t = -x_0 \sin(s)$ y la solución en el dominio característico $v = f(x_0)$. En consecuencia, la solución es

$$v(x, t) = f\left(\sqrt{x^2 + t^2}\right)$$

3.− Resolver el problema de valores iniciales

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \quad v(x, 0) = x^2$$

Solución 3. Las características son $x = x_0 e^s$, $y = x_0 s e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2 + 1) e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x, y) = x^2 e^{-y/x} + e^{+y/x} - 1$$

4.− Resolver el problema de valores iniciales

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \quad v(x, x) = x^2$$

Solución 4. Las características son $x = x_0 e^s$, $y = x_0 e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2 + 1) e^s$. No es posible en este caso obtener una expresión única que relacione las variables del dominio característico con el dominio (x, y) por lo que no existe solución.

5.− Resolver el problema de valores iniciales

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \quad v(x, x^2) = x^2$$

Solución 5. Las características son $x = x_0 e^s$, $y = x_0^2 e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2 + 1) e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x, y) = -1 + y + x^2/y$$

6.— Resolver el problema de valores iniciales

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \quad v(x, x^3) = x^2$$

Solución 6. Las características son $x = x_0 e^s$, $y = x_0^3 e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2 + 1)e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x, y) = -1 + \sqrt{xy} + x\sqrt{x/y}$$

7.— Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad v(x, 0) = x, \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0$$

Solución 7. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x, t) = \left(\frac{f(\eta)}{2} + \frac{\tilde{g}(\eta)}{2c} \right)_{\eta=x+ct} + \left(\frac{f(\xi)}{2} - \frac{\tilde{g}(\xi)}{2c} \right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\tilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x) = x$ y $g(x) = 0$, se obtiene la solución: $v(x, t) = x$.

8.— Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = x$$

Solución 8. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x, t) = \left(\frac{f(\eta)}{2} + \frac{\tilde{g}(\eta)}{2c} \right)_{\eta=x+ct} + \left(\frac{f(\xi)}{2} - \frac{\tilde{g}(\xi)}{2c} \right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\tilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x) = 0$ y $g(x) = x$, se obtiene la solución: $v(x, t) = xt$.

9.— Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad v(x, 0) = \sin(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \lambda \cos(x)$$

Solución 9. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x, t) = \left(\frac{f(\eta)}{2} + \frac{\tilde{g}(\eta)}{2c} \right)_{\eta=x+ct} + \left(\frac{f(\xi)}{2} - \frac{\tilde{g}(\xi)}{2c} \right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\tilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \lambda \cos(x)$, se obtiene la solución:

$$v(x, t) = \sin x \cos(ct) + \frac{\lambda}{c} \cos(x) \sin(ct)$$
