

Ejercicios o demostraciones relacionados con las Transformaciones de Fourier

1.− Obtener la integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & |x| < 1 \\ 0; & |x| > 1 \end{cases}$$

Solución 1. Sea $f(x)$ una función no periódica, continua a trozos y cuya integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ sea finita; su integral de Fourier viene dada por

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)] d\omega$$

siendo $A(\omega)$ y $B(\omega)$ los coeficientes

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos(\omega s) ds; \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin(\omega s) ds$$

En el caso de la función $f(x) = \begin{cases} 1; & |x| < 1 \\ 0; & |x| > 1 \end{cases}$, los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \cos(\omega s) ds = \frac{2 \sin(\omega)}{\pi \omega}; \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sin(\omega s) ds = 0$$

por lo que su integral de Fourier es

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega x) d\omega$$

2.− Las Transformadas de Fourier en Seno ($\mathcal{F}_S[f(x)]$) y en Coseno ($\mathcal{F}_C[f(x)]$) de una función $f(x)$ se calculan según

$$\mathcal{F}_S[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx; \quad \mathcal{F}_C[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

Obtener las expresiones de las transformadas de Fourier en Seno y Coseno de la primera derivada ($f'(x)$) y de la derivada segunda ($f''(x)$).

Solución 2. Sea $f(x)$ una función no periódica continua definida en $(0, +\infty)$, cuya primera derivada sea una función continua a trozos, en la que las integrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ sean finitas, y que verifique $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, se cumple que

$$\mathcal{F}_C[f'] = \omega \mathcal{F}_S[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0); \quad \mathcal{F}_S[f'] = -\omega \mathcal{F}_C[f]$$

Estas expresiones se demuestran sustituyendo en las definiciones de las transformadas e integrando por partes a continuación, esto es,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_C[f'] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f'(x) \cos(\omega x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos(\omega x) \Big|_0^{+\infty} + \omega \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \omega \mathcal{F}_S[f]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S[f'] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f'(x) \sin(\omega x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin(\omega x) \Big|_0^{+\infty} - \omega \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \right] \\ &= -\omega \mathcal{F}_C[f]\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones se pueden deducir las transformaciones de la segunda derivada de una función: así, sea $f(x)$ una función no periódica definida en $(0, +\infty)$ con primera derivada continua, segunda derivada continua a trozos, en la que las integrales $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$ y $\int_0^{+\infty} f''(x) dx$ sean finitas, y que verifique $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ se cumple que

$$\mathcal{F}_C[f''] = -\omega^2 \mathcal{F}_C[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0); \quad \mathcal{F}_S[f''] = -\omega^2 \mathcal{F}_S[f] + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$$

3.— Considérese el problema parabólico siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty;\end{aligned}$$

donde la función $f(x)$ es conocida. Obtener la función $u(x, t)$.

Solución 3. La aplicación de la transformada de Fourier en Seno a la ecuación diferencial en derivadas parciales conduce a

$$\mathcal{F}_S \left[\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{F}_S[u]}{\partial t} - k \left(-\omega^2 \mathcal{F}_S[u] + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega u(0, t) \right) = 0$$

Si se denomina $U(\omega, t) = \mathcal{F}_S[u(x, t)]$ y tenemos en cuenta la condición de contorno $u(0, t) = 0$, resulta la ecuación diferencial ordinaria en la variable t

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

que junto a la transformada de Fourier en seno de la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, esto es $U(\omega, 0) \equiv \mathcal{F}_S[u(x, 0)] = \mathcal{F}_S[f(x)] = F(\omega)$, da lugar al problema de valores iniciales

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\omega^2 U, \quad U(\omega, 0) = F(\omega)$$

cuya solución es

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

$U(\omega, t)$ es la solución del problema planteado en el dominio ω . La solución final se obtiene de la transformada inversa de Fourier en seno de $U(\omega, t)$, es decir,

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} U(\omega, t) \sin(\omega x) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{-k\omega^2 t} \sin(\omega x) d\omega$$

Finalmente si se sustituye $F(\omega)$ por su valor como transformada de Fourier en Seno de $f(x)$ resulta

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(s) \sin(\omega s) ds \right) e^{-k\omega^2 t} \sin(\omega x) d\omega$$

4.— La Transformada de Fourier ($\mathcal{F}[f(x)]$) de una función $f(x)$ se calcula según

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

siendo $i = \sqrt{-1}$. Obtener las expresiones de las transformadas de Fourier de la primera derivada ($f'(x)$) y de la derivada segunda ($f''(x)$).

Solución 4. Sea $f(x)$ una función no periódica continua en $(-\infty, +\infty)$, cuya primera derivada sea una función continua a trozos, en la que las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) dx$ sean finitas, y que verifique $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, se cumple que

$$\mathcal{F}[f'] = i\omega \mathcal{F}[f]$$

Esta expresión se demuestra sustituyendo en la definición de la transformada e integrando por partes a continuación, esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] \\ &= i\omega \mathcal{F}[f] \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede deducir la transformación de la segunda derivada de una función: así, sea $f(x)$ una función no periódica definida en $(-\infty, +\infty)$ con primera derivada continua, segunda derivada continua a trozos, en la que las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) dx$ sean finitas, y que verifique $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ se cumple que

$$\mathcal{F}[f''] = -\omega^2 \mathcal{F}[f]$$

5.— Considérese el problema parabólico siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty;$$

donde la función $f(x)$ es conocida. Obtener la función $u(x, t)$.

Solución 5. La aplicación de la transformada de Fourier a la ecuación diferencial en derivadas parciales conduce a

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{F}[u]}{\partial t} - k(-\omega^2 \mathcal{F}[u]) = 0$$

Si se denomina $U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(x, t)]$, resulta la ecuación diferencial ordinaria en la variable t

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

que junto a la transformada de Fourier de la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, esto es $U(\omega, 0) \equiv \mathcal{F}[u(x, 0)] = \mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$, da lugar al problema de valores iniciales

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\omega^2 U, \quad U(\omega, 0) = F(\omega)$$

cuya solución es

$$U(\omega, t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}$$

$U(\omega, t)$ es la solución del problema planteado en el dominio ω . La solución final se obtiene de la transformada inversa de Fourier de $U(\omega, t)$, es decir,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$$

Así, si se sustituye $F(\omega)$ por su valor como transformada de Fourier de $f(x)$ resulta

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega(x-s)} ds d\omega \end{aligned}$$

Finalmente si tenemos en cuenta que $e^{-k\omega^2 t}$ es una función par en la variable ω , y que

$$e^{i\omega(x-s)} = \cos(\omega(x-s)) + i \sin(\omega(x-s))$$

la solución final se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(s) e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega(x-s)) d\omega ds$$