Ejercicio propuesto en la clase del 1/12/2025

1.– Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}[u] = f(x); \qquad a < x < b; \\ &k_1 u'(a) + k_2 u(a) = \alpha; \\ &l_1 u'(b) + l_2 u(b) = \beta; \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\mathcal{M}[\cdot]$ el operador diferencial

$$\mathcal{M}[\cdot] = \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{d\cdot}{dx}\right) + q(x)\cdot$$

y k_1, k_2, l_1, l_2, α y β valores reales. Obtener la expresión general de la solución u conocida la función de Green $G(x; x_0)$ del problema (1).

Solución 1. La función de Green $G(x; x_0)$ es la solución del problema anterior cuando $f(x) = \delta(x - x_0)$, es decir, se verifica:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}[G(x; x_0)] = \delta(x - x_0); \qquad a < x < b; \\ &k_1 G'(a; x_0) + k_2 G(a; x_0) = 0; \\ &l_1 G'(b; x_0) + l_2 G(b; x_0) = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

Si se conoce esta función (obtenida por ejemplo mediante el método de variación de parámetros o por desarrollo en funciones propias), se puede obtener la solución del problema (1) haciendo uso de la segunda identidad de Green, esto es, para dos funciones V, W de clase $\mathcal{C}^2$

$$\int_a^b \left(V\mathcal{M}[W] - W\mathcal{M}[V]\right) dx = \left[r(x)\left(V(x)W'(x) - V'(x)W(x)\right)\right]\Big|_a^b$$

Así si se elige $V(x) = u(x)$ y $W(x) = G(x; x_0)$ se obtiene,

$$\int_a^b \left(u(x)\mathcal{M}[G(x; x_0)] - G(x; x_0)\mathcal{M}[u(x)]\right) dx = \left[r(x)\left(u(x)G'(x; x_0) - u'(x)G(x; x_0)\right)\right]\Big|_a^b$$

que a su vez viene dada por:

$$\int_a^b \Big(u(x)\underbrace{\mathcal{M}[G(x; x_0)]}_{=\delta(x-x_0)} - G(x; x_0)\underbrace{\mathcal{M}[u(x)]}_{=f(x)}\Big) dx = \left[r(x)\left(u(x)G'(x; x_0) - u'(x)G(x; x_0)\right)\right]\Big|_a^b$$

esto es, si $k_1 \neq 0$, $l_1 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(x_0) = &\int_a^b G(x; x_0) f(x)\, dx \\ &+ r(b)[u(b) \underbrace{G'(b; x_0)}_{=-l_2 G(b;x_0)/l_1} - u'(b)G(b; x_0)] - r(a)[u(a) \underbrace{G'(a; x_0)}_{=-k_2 G(a;x_0)/k_1} - u'(a)G(a; x_0)] \end{aligned}$$

que conduce a

$$u(x_0) = \int_a^b G(x; x_0) f(x)\, dx - \frac{\beta}{l_1} r(b)G(b; x_0) + \frac{\alpha}{k_1} r(a)G(a; x_0)$$

Si $k_1 = 0$, $l_1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(x_0) = &\int_a^b G(x; x_0) f(x)\, dx \\ &+ r(b)[u(b)G'(b; x_0) - u'(b)\underbrace{G(b; x_0)}_{=0}] - r(a)[u(a)G'(a; x_0) - u'(a)\underbrace{G(a; x_0)}_{=0}] \end{aligned}$$

que conduce a

$$u(x_0) = \int_a^b G(x; x_0) f(x)\, dx + \frac{\beta}{l_2} r(b)G'(b; x_0) - \frac{\alpha}{k_2} r(a)G'(a; x_0)$$

Los dos casos restantes ($k_1 \neq 0$, $l_1 = 0$ y $k_1 = 0$, $l_1 \neq 0$) son inmediatos a partir de lo anterior.
