

Ejercicios de la clase del 1/12/2025

1.– Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$u'' = h(x), \quad 0 < x < L; \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0;$$

para distintas funciones $h(x)$. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $h(x)$, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obtener la “función de influencia” o función de Green $G(s, x)$ de la ecuación diferencial, y demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s) G(s, x) ds. \quad (1)$$

Solución 1. La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u''_h = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 + C_2 x$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x) + v_2(x) x$. Por tanto,

$$u'_p = v'_1 + v'_2 x + v_2$$

Si se impone $v'_1 + v'_2 x = 0$, se obtiene u''_p como

$$u''_p = v'_2$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{aligned} v'_2 &= h(x) \\ v'_1 + v'_2 x &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta $v'_1 = -h(x) x$ y $v'_2 = h(x)$. En consecuencia,

$$v_1 = D_1 - \int_0^x h(s) s ds \quad y \quad v_2 = D_2 + \int_0^x h(s) ds$$

Por tanto, la solución general será $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$ y agrupando las constantes de integración, resulta:

$$u(x) = \left[K_1 - \int_0^x h(s) s ds \right] + \left[K_2 + \int_0^x h(s) ds \right] x \quad (2)$$

Imponiendo las condiciones de contorno se pueden determinar K_1 y K_2 . Así, dado que en el extremo $x = 0$ se debe satisfacer $u(0) = 0$, entonces $K_1 = 0$; y en el extremo $x = L$ se debe satisfacer $u(L) = 0$, por lo que,

$$\left[- \int_0^L h(s) s ds \right] + \left[K_2 + \int_0^L h(s) ds \right] L = 0$$

es decir,

$$K_2 = \frac{1}{L} \int_0^L h(s) s ds - \int_0^L h(s) ds$$

Sustituyendo K_1 y K_2 en (2) se obtiene la solución del problema planteado:

$$u(x) = - \int_0^x h(s) s ds + \left[\frac{1}{L} \int_0^L h(s) s ds - \int_0^L h(s) ds + \int_0^x h(s) ds \right] x$$

que a su vez

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_0^x h(s) s ds + \left[\frac{1}{L} \int_0^L h(s) s ds - \int_0^x h(s) ds - \int_x^L h(s) ds + \int_0^x h(s) ds \right] x \\ &= - \int_0^x h(s) s ds + \left[\frac{1}{L} \int_0^L h(s) s ds - \int_x^L h(s) ds \right] x \\ &= - \int_0^x h(s) s ds + \left[\frac{1}{L} \int_0^x h(s) s ds + \frac{1}{L} \int_x^L h(s) s ds - \int_x^L h(s) ds \right] x \\ &= \int_0^x h(s) \left(-s + \frac{sx}{L} \right) ds + \int_x^L h(s) \left(-x + \frac{sx}{L} \right) ds \\ &= \int_0^L h(s) G(x, s) ds \end{aligned}$$

siendo

$$G(x, s) = \begin{cases} -s + \frac{sx}{L}; & 0 < s < x \\ -x + \frac{sx}{L}; & x < s < L \end{cases}$$

que también se puede escribir:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{-s(L-x)}{L}; & 0 < s < x \\ \frac{-x(L-s)}{L}; & x < s < L \end{cases}$$

2.- Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$u'' + u = h(x), \quad 0 < x < L; \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0; \quad L \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

para distintas funciones $h(x)$. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $h(x)$, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obtener la “función de influencia” o función de Green $G(s, x)$ de la ecuación diferencial, y demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s) G(s, x) ds; \quad L \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solución 2. La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u_h'' + u_h = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x) \operatorname{sen}(x) + v_2(x) \cos(x)$. Por tanto,

$$u_p' = v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) + v_1 \cos(x) - v_2 \operatorname{sen}(x)$$

Si se impone $v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) = 0$, se obtiene u_p'' como

$$u_p'' = v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) - v_1 \operatorname{sen}(x) - v_2 \cos(x)$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{aligned} v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) &= h(x) \\ v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta $v_1' = h(x) \cos(x)$ y $v_2' = -h(x) \operatorname{sen}(x)$. En consecuencia,

$$v_1 = K_1 + \int_0^x h(s) \cos(s) ds \quad \text{y} \quad v_2 = K_2 - \int_0^x h(s) \operatorname{sen}(s) ds$$

Por tanto, la solución general será:

$$u(x) = \left[K_1 + \int_0^x h(s) \cos(s) ds \right] \operatorname{sen}(x) + \left[K_2 - \int_0^x h(s) \operatorname{sen}(s) ds \right] \cos(x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno se determinan K_1 y K_2 y se obtiene la solución

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-L)}{\operatorname{sen}(L)} \int_0^x h(s) \operatorname{sen}(s) ds + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(L)} \int_x^L h(s) \operatorname{sen}(s-L) ds = \int_0^L h(s) G(x,s) ds$$

siendo

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-L) \operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}(L)}; & 0 < s < x \\ \frac{\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(s-L)}{\operatorname{sen}(L)}; & x < s < L \end{cases}$$