

## Ejercicios de la clase del 25/11/2025

- 1.- Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = q_L(t), \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \quad (1.1)$$


---

**Solución 1.** Denominemos  $r(x, t)$  a una “función de referencia” que verifique las condiciones de contorno, esto es  $r(0, t) = u_0(t)$ ,  $\frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$ . Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita  $v$  como  $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$  que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x, t) + k \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ v(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ v(x, 0) &= f(x) - r(x, 0), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \quad (1.2)$$

Una función  $r(x, t)$  que verifica  $r(0, t) = u_0(t)$ ,  $\frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$  es por ejemplo:

$$r(x, t) = u_0(t) + x q_L(t)$$

o también

$$r(x, t) = u_0(t) + x^2 \frac{q_L(t)}{2L}$$

Obviamente depende de qué función se elija el problema homogéneo transformado (1.2) resulta de menor o mayor complejidad. Obsérvese que en el nuevo problema aparecen las derivadas temporal y espacial en el término independiente de la ecuación diferencial.

---

- 2.- Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad \alpha u(L, t) + \beta \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = q_L(t), \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \quad (2.1)$$


---

**Solución 2.** Denominemos  $r(x, t)$  a una “función de referencia” que verifique las condiciones de contorno, esto es  $r(0, t) = u_0(t)$ ,  $\alpha r(L, t) + \beta \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$ . Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita  $v$  como  $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$  que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x, t) + k \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ v(0, t) &= 0, \quad \alpha v(L, t) + \beta \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ v(x, 0) &= f(x) - r(x, 0), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \quad (1.2)$$

Una función  $r(x, t)$  que verifica  $r(0, t) = u_0(t)$ ,  $\alpha r(L, t) + \beta \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$  es por ejemplo:

$$r(x, t) = u_0(t) + x \frac{q_L(t) - \alpha u_0(t)}{\alpha L + \beta}$$


---

**3.-** Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x, t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

donde las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son conocidas. Obtener  $u(x, t)$ .

---

**Solución 3.** Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ( $\phi'' - \lambda\phi = 0$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(L) = 0$ ) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\lambda_n = -\mu_n^2; \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad \phi_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad n = 1, 2, \dots;$$

A continuación, planteando la solución  $u(x, t)$  como una serie generalizada de las funciones propias anteriores  $\phi_n$  en la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2 c^2 a_n(t) - \omega_n(t) \right) \phi_n(x) = 0$$

siendo  $\omega_n(t)$  el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función  $W(x, t)$ :

$$\omega_n(t) = \frac{(W, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L W(s, t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

En consecuencia los coeficientes  $a_n(t)$  se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2 c^2 a_n(t) - \omega_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

cuya solución general es

$$a_n(t) = C_n \sin(\mu_n ct) + D_n \cos(\mu_n ct) + \frac{1}{\mu_n c} \int_0^t \omega_n(\tau) \sin(\mu_n c(t-\tau)) d\tau$$

Los coeficientes  $C_n$  y  $D_n$  se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones  $u(x, 0) = f(x)$  y  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$ :

$$C_n = \frac{1}{\mu_n c} \frac{(g, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{1}{\mu_n c} \frac{\int_0^L g(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}; \quad D_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L f(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$


---

4.- Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x, t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \beta(t), \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

donde las funciones  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$  son conocidas. Obtener  $u(x, t)$ .

---

**Solución 4.** Este caso corresponde a un problema con condiciones de contorno no-homogéneas. Si se efectúa un cambio de la función incógnita

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$$

mediante una “función de referencia”  $r(x, t)$  definida de modo que satisfaga

$$\frac{\partial r(0, t)}{\partial x} = \alpha(t), \quad \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = \beta(t)$$

por ejemplo:

$$r(x, t) = \left( \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} x + \alpha(t) \right) x$$

entonces el problema original se reduce a uno con condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \widetilde{W}(x, t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ v(x, 0) &= \tilde{f}(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \tilde{g}(x), \quad 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

siendo

$$\widetilde{W}(x, t) = W(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}; \quad \tilde{f}(x) = f(x) - r(x, 0); \quad \tilde{g}(x) = g(x) - \frac{\partial r(x, 0)}{\partial t}$$

A partir de este punto se procede a la obtención de la función  $v(x, t)$  por desarrollo en funciones propias: Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ( $\phi'' - \lambda\phi = 0$ ,  $\phi'(0) = 0$ ,  $\phi'(L) = 0$ ) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0; \quad \phi_0(x) = 1; \\ \lambda_n = -\mu_n^2; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \phi_n(x) = \cos(\mu_n x), \quad n = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

es decir,

$$\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2; \quad \phi_n(x) = \cos(n\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

A continuación, planteando la solución  $v(x, t)$  como una serie generalizada de las funciones propias anteriores  $\phi_n$  en la forma:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} a_n(t) - \omega_n(t) \right) \phi_n(x) = 0$$

siendo  $\omega_n(t)$  el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función  $\tilde{W}(x, t)$ :

$$\omega_n(t) = \frac{(\tilde{W}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L \tilde{W}(s, t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

En consecuencia los coeficientes  $a_n(t)$  se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} a_n(t) - \omega_n(t) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

cuya solución general es, según sea el valor de  $n$ :

$$\begin{cases} a_0(t) = C_0 t + D_0 + \int_0^t \omega_n(\tau) (t - \tau) d\tau; \quad n = 0 \\ a_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + \frac{L}{n\pi c} \int_0^t \omega_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi c(t - \tau)}{L}\right) d\tau; \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Los coeficientes  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $C_n$  y  $D_n$  se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones  $v(x, 0) = \tilde{f}(x)$  y  $\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \tilde{g}(x)$ :

$$C_0 = \frac{(\tilde{g}, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{g}(s) ds; \quad D_0 = \frac{(\tilde{f}, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{f}(s) ds$$

$$C_n = \frac{L}{n\pi c} \frac{(\tilde{g}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{L}{n\pi c} \frac{\int_0^L \tilde{g}(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}; \quad D_n = \frac{(\tilde{f}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L \tilde{f}(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$


---