Ejercicios propuestos en la clase del 24/11/2025

1.– Considérese el siguiente problema parabólico en un rectángulo de dimensiones $L \times H$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u; \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H, \quad t > 0;\\
&\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(L,y,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le y \le H, \quad t \ge 0;\\
&u(x,0,t) = 0, \quad u(x,H,t) = 0, \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0;\\
&u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0 \le x \le L, \quad 0 \le y \le H;
\end{aligned}
$$

donde la función $f(x,y)$ es conocida. Obtener $u(x,y,t)$.

Solución 1. Este caso se puede resolver por separación de variables planteando que $u(x,y,t) = \phi(x,y)T(t)$ que conduce a las ecuaciones separadas siguientes (incluyendo la separación de las condiciones de contorno):

$$
\begin{aligned}
&\Delta\phi - \lambda\phi = 0; \quad \frac{\partial \phi(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(L,y)}{\partial x} = 0, \qquad \phi(x,0) = \phi(x,H) = 0\\
&\frac{dT}{dt} - \lambda k T = 0;
\end{aligned}
$$

El ecuación de Helmholtz $\Delta\phi - \lambda\phi = 0$ con las condiciones de contorno homogéneas $\dfrac{\partial \phi(0,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi(L,y)}{\partial x} = \phi(x,0) = \phi(x,H) = 0$ constituye un problema de autovalores y autofunciones. Éstas se pueden obtener por separación de variables en la forma $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ de modo que resultan los autovalores y funciones propias siguientes:

$$
\lambda_{mn} = -\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}\right)\pi^2, \qquad \phi_{mn}(x,y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right), \quad n = 0,1,2,...; \; m = 1,2,...
$$

(Nótese que la función propia asociada al valor propio nulo en la dirección x, que es una constante, se ha incluido en el conjunto $\cos(n\pi x/L)$, ya que $n = 0,1,2,...$).

En consecuencia, resolviendo asimismo la ecuación en la variable t, la solución se puede escribir como una serie generalizada de Fourier de las funciones propias ϕ_{mn} en la forma:

$$
u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t)\phi_{mn}(x,y)
$$

esto es,

$$
u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)e^{-(m^2/H^2+n^2/L^2)\pi^2 kt}
$$

Los coeficientes C_{m0} y C_{mn} se obtienen de imponer la condición inicial $u(x,y,0) = f(x,y)$, obteniéndose

$$
C_{m0} = \frac{2}{LH}\int_0^L\int_0^H f(\xi,\eta)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right)d\xi\, d\eta
$$

$$
C_{mn} = \frac{4}{LH}\int_0^L\int_0^H f(\xi,\eta)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right)d\xi\, d\eta
$$

2.– Considérese el siguiente problema hiperbólico en un rectángulo de dimensiones $L \times H$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u; \quad 0 < x < L, \;\; 0 < y < H, \;\; t > 0;\\
&u(0, y, t) = 0, \;\; u(L, y, t) = 0, \;\; 0 \le y \le H, \;\; t \ge 0;\\
&u(x, 0, t) = 0, \;\; u(x, H, t) = 0, \;\; 0 \le x \le L, \;\; t \ge 0;\\
&u(x, y, 0) = f(x, y), \;\; 0 \le x \le L, \;\; 0 \le y \le H;\\
&\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y), \;\; 0 \le x \le L, \;\; 0 \le y \le H;
\end{aligned}$$

donde las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son conocidas. Obtener $u(x, y, t)$.

Solución 2. Este caso se puede resolver por separación de variables planteando que $u(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ que conduce a las ecuaciones separadas siguientes (incluyendo la separación de las condiciones de contorno):

$$\begin{aligned}
&\Delta\phi - \lambda\phi = 0; \quad \phi(0, y) = \phi(L, y) = 0, \qquad \phi(x, 0) = \phi(x, H) = 0\\
&\frac{d^2 T}{dt^2} - \lambda c^2 T = 0;
\end{aligned}$$

El ecuación de Helmholtz $\Delta\phi - \lambda\phi = 0$ con las condiciones de contorno homogéneas $\phi(0, y) = \phi(L, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, H) = 0$ constituye un problema de autovalores y autofunciones. Éstas se pueden obtener por separación de variables en la forma $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ de modo que resultan los autovalores y funciones propias siguientes:

$$\lambda_{mn} = -\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}\right)\pi^2, \qquad \phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}; \; m \in \mathbb{N}$$

En consecuencia, resolviendo asimismo la ecuación en la variable t, la solución se puede escribir como una serie generalizada de Fourier de las funciones propias ϕ_{mn} en la forma:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t)\phi_{mn}(x, y)$$

esto es,

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn}\sin\left(\alpha_{mn}\pi c t\right) + B_{mn}\cos\left(\alpha_{mn}\pi c t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

siendo $\alpha_{mn} = \sqrt{m^2/H^2 + n^2/L^2}$.

Los coeficientes A_{mn} y B_{mn} se obtienen de imponer las condiciones iniciales:

$$A_{mn} = \frac{4}{LH(\alpha_{mn}\pi c)}\int_0^L\int_0^H g(\xi, \eta)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right)\, d\xi\, d\eta$$

$$B_{mn} = \frac{4}{LH}\int_0^L\int_0^H f(\xi, \eta)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right)\, d\xi\, d\eta$$
