

Problema Interior de Dirichlet en un círculo de radio unidad

1.— Considérese el siguiente Problema Interior de Dirichlet en un círculo de radio unidad:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0; \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ u(1, \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;\end{aligned}\tag{1}$$

donde la función $f(\theta)$ es conocida. Obtener la función solución $u(r, \theta)$.

La ecuación diferencial es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(r, \theta) = \phi(r)\Theta(\theta)\tag{2}$$

resultando

$$r^2 \frac{\phi''}{\phi} + r \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{\Theta''}{\Theta}\tag{3}$$

Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ , resultan las ecuaciones

$$r^2 \phi'' + r \phi' - \lambda \phi = 0\tag{4.a}$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0\tag{4.b}$$

Asimismo introduciendo las condiciones periódicas

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi); \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial r} = \frac{\partial u(r, 2\pi)}{\partial r}\tag{5}$$

que en forma separada son de la forma $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ y $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$, resulta el problema de contorno

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)\tag{6}$$

Discusión del problema de contorno

- **Valores propios negativos** ($\lambda = -\mu^2$). No existen valores propios negativos ni funciones propias asociadas.
- **Valor propio nulo** ($\lambda = 0$). La solución general es de la forma

$$\Theta = A + B\theta\tag{7}$$

y la aplicación de las condiciones de contorno conduce a que $B = 0$, para cualquier valor de la constante A . Por tanto, $\lambda = 0$ es valor propio y la función propia asociada es

$$\Theta_0(\theta) = A_0$$

(8)

- **Valores propios positivos** ($\lambda = +\mu^2$). La solución general es de la forma

$$\Theta = A \operatorname{sen}(\mu\theta) + B \cos(\mu\theta)\tag{9}$$

y la aplicación de las condiciones de contorno conduce a las igualdades:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \longrightarrow B(1 - \cos(2\pi\mu)) = A \sin(2\pi\mu)\tag{10}$$

$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \longrightarrow A(1 - \cos(2\pi\mu)) = -B \sin(2\pi\mu)\tag{11}$$

es decir, hay que satisfacer simultáneamente las identidades

$$1 - \cos(2\pi\mu) = 0, \quad \sin(2\pi\mu) = 0 \quad (12)$$

que se verifican siempre que $\mu = n$, $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\forall A, B$, los valores propios son $\lambda_n = +n^2$ y las funciones propias asociadas

$$\Theta_n = A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

La resolución de la ecuación diferencial (4.a), para los distintos valores propios conduce a

$$\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad r^2 \phi'' + r \phi' = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r) \quad (14.a)$$

$$\lambda = n^2 \quad \longrightarrow \quad r^2 \phi'' + r \phi' - n^2 \phi = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \quad (14.b)$$

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida en (2) y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie de Fourier

$$u(r, \theta) = \phi_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) \Theta_n(\theta) \quad (15)$$

esto es:

$$u(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln(r)) A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)) \quad (16)$$

El problema planteado en (1) es un problema interior de Dirichlet y en consecuencia uno de los límites de integración tiende a 0. En dicho extremo debe introducirse algún tipo de condición que establezca cómo se comporta la solución cuando $r \rightarrow 0$, por ejemplo, que esté acotada. Introduciendo esta condición en la serie de Fourier dada en (16) obtendremos que los coeficientes D_0 y D_n deben ser nulos, esto es,

$$D_0 = 0; \quad D_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

En consecuencia la solución a falta de imponer la condición de contorno en $r = 1$ es

$$u(r, \theta) = \tilde{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\tilde{A}_n \sin(n\theta) + \tilde{B}_n \cos(n\theta) \right) \quad (18)$$

donde se han redefinido unas constantes $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$ por agrupación de las anteriores.

Finalmente la imposición de la condición de contorno no homogénea $u(1, \theta) = f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ conduce a la identidad

$$f(\theta) = \tilde{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \sin(n\theta) + \tilde{B}_n \cos(n\theta) \right) \quad (19)$$

de la que se obtienen los coeficientes:

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds, \quad \tilde{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{sen}(n s) ds, \quad \tilde{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(n s) ds \quad (20)$$

La solución final sustituyendo estos coeficientes en (18) es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{sen}(n s) \operatorname{sen}(n \theta) ds + \int_0^{2\pi} f(s) \cos(n s) \cos(n \theta) ds \right]$$
