

Ejercicio propuesto en la clase del 3/12/2024

1.— Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[u] &= f(x); & a < x < b; \\ k_1 u'(a) + k_2 u(a) &= \alpha; \\ l_1 u'(b) + l_2 u(b) &= \beta; \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\mathcal{M}[\cdot]$ el operador diferencial

$$\mathcal{M}[\cdot] = \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d\cdot}{dx} \right) + q(x).$$

y $k_1, k_2, l_1, l_2, \alpha$ y β valores reales. Obtener la expresión general de la solución u conocida la función de Green $G(x; x_0)$ del problema (1).

Solución 1. La función de Green $G(x; x_0)$ es la solución del problema anterior cuando $f(x) = \delta(x - x_0)$, es decir, se verifica:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[G(x; x_0)] &= \delta(x - x_0); & a < x < b; \\ k_1 G'(a; x_0) + k_2 G(a; x_0) &= 0; \\ l_1 G'(b; x_0) + l_2 G(b; x_0) &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

Si se conoce esta función (obtenida por ejemplo mediante el método de variación de parámetros o por desarrollo en funciones propias), se puede obtener la solución del problema (1) haciendo uso de la segunda identidad de Green, esto es, para dos funciones V, W de clase \mathcal{C}^2

$$\int_a^b (V \mathcal{M}[W] - W \mathcal{M}[V]) dx = [r(x) (V(x)W'(x) - V'(x)W(x))] \Big|_a^b$$

Así si se elige $V(x) = u(x)$ y $W(x) = G(x; x_0)$ se obtiene,

$$\int_a^b (u(x) \mathcal{M}[G(x; x_0)] - G(x; x_0) \mathcal{M}[u(x)]) dx = [r(x) (u(x)G'(x; x_0) - u'(x)G(x; x_0))] \Big|_a^b$$

que a su vez viene dada por:

$$\int_a^b (u(x) \underbrace{\mathcal{M}[G(x; x_0)]}_{=\delta(x-x_0)} - G(x; x_0) \underbrace{\mathcal{M}[u(x)]}_{=f(x)}) dx = [r(x) (u(x)G'(x; x_0) - u'(x)G(x; x_0))] \Big|_a^b$$

esto es, si $k_1 \neq 0, l_1 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_a^b G(x; x_0) f(x) dx \\ &+ r(b) \left[u(b) \underbrace{G'(b; x_0)}_{=-l_2 G(b; x_0)/l_1} - u'(b) G(b; x_0) \right] - r(a) \left[u(a) \underbrace{G'(a; x_0)}_{=-k_2 G(a; x_0)/k_1} - u'(a) G(a; x_0) \right] \end{aligned}$$

que conduce a

$$u(x_0) = \int_a^b G(x; x_0) f(x) dx - \frac{\beta}{l_1} r(b) G(b; x_0) + \frac{\alpha}{k_1} r(a) G(a; x_0)$$

Si $k_1 = 0, l_1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_a^b G(x; x_0) f(x) dx \\ &+ r(b) [u(b) G'(b; x_0) - u'(b) \underbrace{G(b; x_0)}_{=0}] - r(a) [u(a) G'(a; x_0) - u'(a) \underbrace{G(a; x_0)}_{=0}] \end{aligned}$$

que conduce a

$$u(x_0) = \int_a^b G(x; x_0) f(x) dx + \frac{\beta}{l_2} r(b) G'(b; x_0) - \frac{\alpha}{k_2} r(a) G'(a; x_0)$$

Los dos casos restantes ($k_1 \neq 0, l_1 = 0$ y $k_1 = 0, l_1 \neq 0$) son inmediatos a partir de lo anterior.