SIMETRÍA DE LA FUNCIÓN DE GREEN (3/12/2024)

1.– Considérese el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}[u] = f(x); \qquad a < x < b;\\
&k_1 u'(a) + k_2 u(a) = 0;\\
&l_1 u'(b) + l_2 u(b) = 0;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

siendo $\mathcal{M}[\cdot]$ el operador diferencial

$$
\mathcal{M}[\cdot] = \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{d\cdot}{dx}\right) + q(x)\cdot
$$

y k_1, k_2, l_1 y l_2 valores reales. Demostrar que la función de Green del problema (1) es simétrica.

Solución 1. La función de Green $G(x;x_i)$ es la solución del problema anterior cuando el término independiente de la EDO se corresponde con una fuente o una carga puntual aplicada en el punto x_i ($a < x_i < b$), esto es, $f(x) = \delta(x - x_i)$. Por consiguiente, la función de Green verifica:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}[G(x;x_i)] = \delta(x - x_i); \qquad a < x < b;\\
&k_1 G'(a;x_i) + k_2 G(a;x_i) = 0;\\
&l_1 G'(b;x_i) + l_2 G(b;x_i) = 0;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Obviamente, en el caso de aplicar la carga puntual en otro punto, por ejemplo x_j ($a < x_j < b$), la función de Green es $G(x;x_j)$ y satisface

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}[G(x;x_j)] = \delta(x - x_j); \qquad a < x < b;\\
&k_1 G'(a;x_j) + k_2 G(a;x_j) = 0;\\
&l_1 G'(b;x_j) + l_2 G(b;x_j) = 0;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

El punto de partida para demostrar la simetría de la función de Green del problema (1) es la aplicación de la **Segunda Identidad de Green** que establece que para dos funciones V, W cualesquiera de clase $\mathcal{C}^2$ se verifica

$$
\int_a^b \left(V\mathcal{M}[W] - W\mathcal{M}[V]\right)dx = \left[r(x)\left(V(x)W'(x) - V'(x)W(x)\right)\right]\Big|_a^b
$$

Así, si se eligen las funciones V y W como $V(x) = G(x;x_i)$ y $W(x) = G(x;x_j)$ se obtiene,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(G(x;x_i)\mathcal{M}[G(x;x_j)] - G(x;x_j)\mathcal{M}[G(x;x_i)]\right)dx =\\
&\qquad = \left[r(x)\left(G(x;x_i)\,G'(x;x_j) - G'(x;x_i)G(x;x_j)\right)\right]\Big|_a^b
\end{aligned}
\tag{4}
$$

que a su vez:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \Big(G(x;x_i)\underbrace{\mathcal{M}[G(x;x_j)]}_{=\delta(x-x_j)} - G(x;x_j)\underbrace{\mathcal{M}[G(x;x_i)]}_{=\delta(x-x_i)}\Big)dx =\\
&\qquad = \left[r(x)\left(G(x;x_i)\,G'(x;x_j) - G'(x;x_i)G(x;x_j)\right)\right]\Big|_a^b
\end{aligned}
\tag{5}
$$

y haciendo uso de las propiedades de las integrales del producto de una función por una delta de Dirac resulta:

$$
G(x_j;x_i) - G(x_i;x_j) = \left[r(x)\left(G(x;x_i)\,G'(x;x_j) - G'(x;x_i)G(x;x_j)\right)\right]\Big|_a^b
\tag{6}
$$

En el término de la derecha, sustituyendo las ecuaciones de las condiciones de contorno, si $k_1 \neq 0$, $l_1 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} G(x_j;x_i) - G(x_i;x_j) = & r(b)[G(b;x_i) \underbrace{G'(b;x_j)}_{=-l_2 G(b;x_j)/l_1} - \underbrace{G'(b;x_i)}_{=-l_2 G(b;x_i)/l_1} G(b;x_j)] \\ & -r(a)[G(a;x_i) \underbrace{G'(a;x_j)}_{=-k_2 G(a;x_j)/k_1} - \underbrace{G'(a;x_i)}_{=-k_2 G(a;x_i)/k_1} G(a;x_j)] \end{aligned} \tag{7}$$

que conduce a

$$G(x_j;x_i) - G(x_i;x_j) = 0 \tag{8}$$

Si $k_1 = 0$ y/o $l_1 = 0$ entonces la sustitución de las condiciones de contorno resultantes en estos supuestos en (7) conduce al mismo resultado dado por (8).

En conclusión la función de Green del problema (1) es simétrica:

$$G(x_j;x_i) = G(x_i;x_j) \tag{9}$$

Este resultado se conoce en Mecánica de los Medios Continuos como **Teorema de Reciprocidad de Maxwell** de 1864 (que a su vez es un caso particular del teorema de Maxwell-Betti), y que establece que *"si sobre un cuerpo elástico actúa una causa en un punto x_i, la deformación que se produce en otro punto x_j del sistema es igual a la deformación que se produciría en el punto x_i si la causa actuase en el punto x_j".*