

Ejercicio propuesto en la clase del 3/12/2024

1.— Considérese el siguiente problema parabólico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L; \end{aligned}$$

donde las funciones $f(x)$ y $Q(x, t)$ son conocidas. A partir de la solución de este problema por desarrollo en funciones propias, escribir la solución $u(x, t)$ como la suma de las contribuciones de la condición inicial y del término fuente de la ecuación diferencial por sus correspondientes funciones de influencia.

Solución 1. La solución de este caso por desarrollo en funciones propias es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \phi_n(x) \quad (1)$$

siendo $u_n(t)$

$$u_n(t) = e^{\lambda_n t} \left(K_n + \int_{\tau=0}^{\tau=t} q_n(\tau) e^{-\lambda_n \tau} d\tau \right) \quad (2)$$

donde K_n y $q_n(t)$ son respectivamente

$$K_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \quad q_n(t) = \frac{(Q, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} \quad (3)$$

Los valores propios λ_n y las funciones propias ϕ_n son:

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \phi_n = \sin(\mu_n x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Los términos K_n y $q_n(t)$ se pueden también escribir:

$$K_n = \frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} f(s) \sin(\mu_n s) ds; \quad q_n(t) = \frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} Q(s, t) \sin(\mu_n s) ds \quad (5)$$

que sustituyendo en (2) resulta:

$$u_n(t) = e^{-\mu_n^2 t} \left(\frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} f(s) \sin(\mu_n s) ds + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left[\frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} Q(s, \tau) \sin(\mu_n s) ds \right] e^{\mu_n^2 \tau} d\tau \right) \quad (6)$$

La expresión (6) corresponde a los coeficientes $u_n(t)$ de la serie (1) que constituye la solución, que podemos escribir como la suma de dos series:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t} \left(\frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} f(s) \sin(\mu_n s) ds \right) \sin(\mu_n x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t} \left(\int_{\tau=0}^{\tau=t} \left[\frac{2}{L} \int_{s=0}^{s=L} Q(s, \tau) \sin(\mu_n s) ds \right] e^{\mu_n^2 \tau} d\tau \right) \sin(\mu_n x) \end{aligned} \quad (7)$$

es decir:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{s=0}^{s=L} f(s) \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\mu_n s) \sin(\mu_n x) e^{-\mu_n^2 t} \right] \right) ds \\ &+ \int_{\tau=0}^{\tau=t} \int_{s=0}^{s=L} Q(s, \tau) \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\mu_n s) \sin(\mu_n x) e^{-\mu_n^2 (t-\tau)} \right] \right) ds d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Por consiguiente, la solución del problema planteado se puede escribir como la suma de las contribuciones debida a la condición inicial $f(x)$ y la debida al término fuente $Q(x, t)$ de la ecuación diferencial:

$$u(x, t) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)G(x, t; s)ds + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \int_{s=0}^{s=L} Q(s, \tau)G(x, t - \tau; s)ds d\tau \quad (9)$$

siendo $G(x, t; s)$ la función de influencia:

$$G(x, t; s) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\mu_n s) \sin(\mu_n x) e^{-\mu_n^2 t} \right] \quad (10)$$
