Ejercicios de la clase del 2/12/2024

1.– Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ &u(0,t) = u_0(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q_L(t), \quad t \geq 0; \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.1}$$

Solución 1. Denominemos $r(x,t)$ a una "función de referencia" que verifique las condiciones de contorno, esto es $r(0,t) = u_0(t)$, $\dfrac{\partial r(L,t)}{\partial x} = q_L(t)$. Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita v como $u(x,t) = v(x,t) + r(x,t)$ que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x,t) + k\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ &v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ &v(x,0) = f(x) - r(x,0), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una función $r(x,t)$ que verifica $r(0,t) = u_0(t)$, $\dfrac{\partial r(L,t)}{\partial x} = q_L(t)$ es por ejemplo:

$$r(x,t) = u_0(t) + x\, q_L(t)$$

o también

$$r(x,t) = u_0(t) + x^2\, \frac{q_L(t)}{2L}$$

Obviamente depende de qué función se elija el problema homogéneo transformado (1.2) resulta de menor o mayor complejidad. Obsérvese que en el nuevo problema aparecen las derivadas temporal y espacial en el término independiente de la ecuación diferencial.

2.– Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ &u(0,t) = u_0(t), \quad \alpha u(L,t) + \beta\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q_L(t), \quad t \geq 0; \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{2.1}$$

Solución 2. Denominemos $r(x,t)$ a una "función de referencia" que verifique las condiciones de contorno, esto es $r(0,t) = u_0(t)$, $\alpha r(L,t) + \beta\dfrac{\partial r(L,t)}{\partial x} = q_L(t)$. Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita v como $u(x,t) = v(x,t)+r(x,t)$ que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x,t) + k\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ &v(0,t) = 0, \quad \alpha v(L,t) + \beta\frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ &v(x,0) = f(x) - r(x,0), \quad 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una función $r(x,t)$ que verifica $r(0,t) = u_0(t)$, $\alpha r(L,t) + \beta\dfrac{\partial r(L,t)}{\partial x} = q_L(t)$ es por ejemplo:

$$r(x,t) = u_0(t) + x\, \frac{q_L(t) - \alpha u_0(t)}{\alpha L + \beta}$$

3.– Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x,t); \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0;$$
$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L;$$

donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas. Obtener $u(x,t)$.

Solución 3. Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ($\phi'' - \lambda\phi = 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(L) = 0$) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\lambda_n = -\mu_n^2; \qquad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \qquad \phi_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad n = 1, 2, ...;$$

A continuación, planteando la solución $u(x,t)$ como una serie generalizada de las funciones propias anteriores ϕ_n en la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2\, c^2\, a_n(t) - \omega_n(t) \right) \phi_n(x) = 0$$

siendo $\omega_n(t)$ el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función $W(x,t)$:

$$\omega_n(t) = \frac{(W, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\displaystyle\int_0^L W(s,t)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds}$$

En consecuencia los coefientes $a_n(t)$ se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2\, c^2\, a_n(t) - \omega_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

cuya solución general es

$$a_n(t) = C_n \sin(\mu_n ct) + D_n \cos(\mu_n ct) + \frac{1}{\mu_n c} \int_0^t \omega_n(\tau) \sin(\mu_n c(t - \tau)) d\tau$$

Los coeficientes C_n y D_n se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones $u(x,0) = f(x)$ y $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$:

$$C_n = \frac{1}{\mu_n c} \frac{(g, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{1}{\mu_n c} \frac{\displaystyle\int_0^L g(s)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds}; \qquad D_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\displaystyle\int_0^L f(s)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds}$$

4.– Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x,t); \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;\\
&\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \alpha(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \beta(t), \quad t \geq 0;\\
&u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L;
\end{aligned}$$

donde las funciones $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas. Obtener $u(x,t)$.

Solución 4. Este caso corresponde a un problema con condiciones de contorno no-homogéneas. Si se efectúa un cambio de la función incógnita

$$u(x,t) = v(x,t) + r(x,t)$$

mediante una "función de referencia" $r(x,t)$ definida de modo que satisfaga

$$\frac{\partial r(0,t)}{\partial x} = \alpha(t), \quad \frac{\partial r(L,t)}{\partial x} = \beta(t)$$

por ejemplo:

$$r(x,t) = \left(\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} x + \alpha(t) \right) x$$

entonces el problema original se reduce a uno con condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \widetilde{W}(x,t); \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;\\
&\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0;\\
&v(x,0) = \widetilde{f}(x), \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \widetilde{g}(x), \quad 0 \leq x \leq L;
\end{aligned}$$

siendo

$$\widetilde{W}(x,t) = W(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}; \qquad \widetilde{f}(x) = f(x) - r(x,0); \qquad \widetilde{g}(x) = g(x) - \frac{\partial r(x,0)}{\partial t}$$

A partir de este punto se procede a la obtención de la función $v(x,t)$ por desarrollo en funciones propias: Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ($\phi'' - \lambda\phi = 0$, $\phi'(0) = 0$, $\phi'(L) = 0$) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\begin{cases}
\lambda_0 = 0; \quad \phi_0(x) = 1; \\
\\
\lambda_n = -\mu_n^2; \quad \mu_n = \dfrac{n\pi}{L}, \quad \phi_n(x) = \cos(\mu_n x), \quad n = 1, 2, ...;
\end{cases}$$

es decir,

$$\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2; \qquad \phi_n(x) = \cos(n\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

A continuación, planteando la solución $v(x,t)$ como una serie generalizada de las funciones propias anteriores ϕ_n en la forma:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^2a_n(t)}{dt^2}+\frac{n^2\pi^2\,c^2}{L^2}\,a_n(t)-\omega_n(t)\right)\phi_n(x)=0$$

siendo $\omega_n(t)$ el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función $\widetilde{W}(x,t)$:

$$\omega_n(t)=\frac{(\widetilde{W},\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}=\frac{\displaystyle\int_0^L \widetilde{W}(s,t)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds}$$

En consecuencia los coefientes $a_n(t)$ se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2a_n(t)}{dt^2}+\frac{n^2\pi^2\,c^2}{L^2}\,a_n(t)-\omega_n(t)=0;\qquad n=0,1,2,...$$

cuya solución general es, según sea el valor de n:

$$\begin{cases} a_0(t)=C_0\,t+D_0+\displaystyle\int_0^t \omega_n(\tau)\,(t-\tau)d\tau;\ n=0 \\ \\ a_n(t)=C_n\sin\left(\dfrac{n\pi ct}{L}\right)+D_n\cos\left(\dfrac{n\pi ct}{L}\right)+\dfrac{L}{n\pi c}\displaystyle\int_0^t \omega_n(\tau)\sin\left(\dfrac{n\pi c(t-\tau)}{L}\right)d\tau;\ n=1,2,... \end{cases}$$

Los coeficientes C_0, D_0, C_n y D_n se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones $v(x,0)=\widetilde{f}(x)$ y $\dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t}=\widetilde{g}(x)$:

$$C_0=\frac{(\widetilde{g},\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{1}{L}\int_0^L \widetilde{g}(s)ds;\qquad D_0=\frac{(\widetilde{f},\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{1}{L}\int_0^L \widetilde{f}(s)ds$$

$$C_n=\frac{L}{n\pi c}\frac{(\widetilde{g},\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}=\frac{L}{n\pi c}\frac{\displaystyle\int_0^L \widetilde{g}(s)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds};\qquad D_n=\frac{(\widetilde{f},\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}=\frac{\displaystyle\int_0^L \widetilde{f}(s)\phi_n(s)ds}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(s)ds}$$