

**Ejercicios propuestos de la clase del 26/11/2024**

- 1.— Considérese el siguiente Problema Interior de Dirichlet con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio unidad:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0; \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

donde la función  $f(\theta)$  es conocida. Obtener una fórmula integral de Poisson.

**Solución 1.** De acuerdo con lo visto en clase, tras separar variables, introducir condiciones periódicas y obtener las funciones propias, la solución  $u(r, \theta)$  se puede escribir en serie generalizada de Fourier en la forma:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) r^n]$$

y los coeficientes vienen dados por

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds; \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(ns) ds; \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin(ns) ds$$

Se denomina “fórmula integral de Poisson” a la expresión resultante de sustituir los coeficientes en la serie generalizada, reordenar los términos y sumar la serie. Así, si sustituimos los coeficientes y hacemos un poco de álgebra, obtendremos:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{r^n}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(s) \cos(ns) ds \cos(n\theta) + \int_0^{2\pi} f(s) \sin(ns) ds \sin(n\theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos(ns) \cos(n\theta) + \sin(ns) \sin(n\theta)) \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - s)) \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{ni(\theta-s)} + e^{-ni(\theta-s)}}{2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (r e^{i(\theta-s)})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (r e^{-i(\theta-s)})^n \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ 1 + \frac{r e^{i(\theta-s)}}{1 - r e^{i(\theta-s)}} + \frac{r e^{-i(\theta-s)}}{1 - r e^{-i(\theta-s)}} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ \frac{1 - r^2}{1 - r e^{i(\theta-s)} - r e^{-i(\theta-s)} + r^2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left[ \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - s) + r^2} \right] ds \end{aligned}$$

La expresión final se conoce como “fórmula integral de Poisson” para el problema interior de Dirichlet en un círculo:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - s) + r^2} ds$$

2.— Considérese el siguiente Problema Exterior de Dirichlet con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio  $R$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0; \quad R < r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$u(R, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

donde la función  $f(\theta)$  es conocida. Obtener  $u(r, \theta)$  y una fórmula integral de Poisson.

**Solución 2.** Este caso es análogo al problema anterior excepto que el dominio es  $(R, +\infty)$  y que la ecuación diferencial ahora no es singular por lo que en este caso hay que introducir condiciones de normalidad en infinito. Tras separar variables, introducir condiciones periódicas y obtener las funciones propias, la solución  $u(r, \theta)$  se puede escribir en serie generalizada de Fourier en la forma:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \frac{1}{r^n} \right]$$

y los coeficientes vienen dados por

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds; \quad A_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(ns) ds; \quad B_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin(ns) ds$$

Finalmente se puede obtener una fórmula integral de Poisson, sustituyendo los coeficientes en la serie generalizada y manipulando analíticamente la expresión resultante hasta sumar la serie, esto es:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{1 - (R/r)^2}{1 - 2 \cos(\theta - s)R/r + (R/r)^2} ds$$